ЛЕКЦІЯ №1

Тема заняття: Перовісна. Таблиця первісних. Невизначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст.

Мета заняття: Формування поняття первісної функції та поняття невизначеного інтегралу, знання таблиці первісних.

I. Аналіз контрольної роботи.

II. Сприймання і усвідомлення поняття первісної.

При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати *s(t)* матеріальної точки. Миттєва швидкість *v*(*t*) дорівнює похідній функції *s(t),* тобто *v(t) = s'(t).*

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості *v(t)* руху точки знайти пройдений нею шлях *s(t),* тобто знайти таку функцію s(і), похідна якої дорівнює *v*(*t*). Функцію s(*t*) таку, що *s'(t) = v(t),* називають первісною функції *v(t).* Наприклад, якщо *v{t) = gt,* то *s(t)* = $\frac{gt^2}{2}$ є первісною функції *v(t),* оскільки $g'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^I = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$.

Функція *F(x)* називається *первісною* функції *f(x)* на деякому проміжку, якщо для всіх *x* із цього проміжку виконується рівність: *F'(X) = f(x).*

Наприклад, функція *F(x)* = sin *x* є первісною функції *f(x) = cos x* для *x* є *R,* бо (sin *x)'* = cos *x;* функція *F(x) = tg x* є первісною функції *f(x)* = $\frac{1}{cos^2 x}$, бо *F'(x) = (tgx)'* = $\frac{1}{cos^2 x}$ = *f(x)* для всіх *x*, крім *x* = $\frac{\pi}{2}$ + *πn, n* є *Z.*

<u>Виконання вправ</u>

Покажіть, що функція *F(x)* є первісною функції *f(x)* для вказаних значень *x:*

1. *F(x) = kx, f(x) = k, x* є R.
2. *F(x)* = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, *f(x)* = x^n, *x* є (0; +∞), *n* ≠ *-1.*
3. *F(x)* = $ln|x|$, *f(x)* = $\frac{1}{x}$, *x* ≠ *0.*
4. *F(x)* = e^x, *f(x)* = e^x, *x є R.*
5. *F(x)*= $\frac{a^x}{\ln a}$, *f(x)*=a^x, *x є R.*
6. *F(x) = -cos x, f(x) = sin x, x є R.*
7. *F(x) = -ctg x, f(x)* = $\frac{1}{\sin^2 x}$, *x* ≠ *πn.*

III. Сприймання і усвідомлення основної властивості первісної, поняття невизначеного інтеграла.

Розглянемо функцію *f(x)* = x^2. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$,

$F_3(x)=\frac{x^3}{3}-5$ є первісними функції $f(x)$.

Дійсно, $F_1^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)^I=\frac{3x^2}{3}=x^2=f(x)$, $F_2^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}+2\right)^I=x^2+0=x^2=f(x)$,

$F_3^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}-5\right)^I=x^2-0=x^2=f(x)$.

Взагалі будь-яка функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$ + C, де C — постійна, є первісною функції x^2. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначне.

Теорема 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної C функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$.

Доведення

Оскільки $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.

Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, а ця рівність означає, що $F(x) + C$ є первісною для функції $f(x)$.

Теорема 2. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції $f(x)$ на цьому проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — деяка стала (число).

Доведення

Нехай $F(x)$ і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції $f(x)$, тобто $F^I(x) = f(x)$, $F_1^I(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) - F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1^I(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції $y = g(x)$ у кожній точці цього проміжку паралельна осі OX. Тому графіком функції $y = g(x)$ є пряма, яка паралельна осі OX, тобто $g(x)$ = C, де C — деяка стала. Із рівностей $g(x) = C$, $g(x) = F_1(x) - F(x)$ випливає, що $F_1(x) - F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

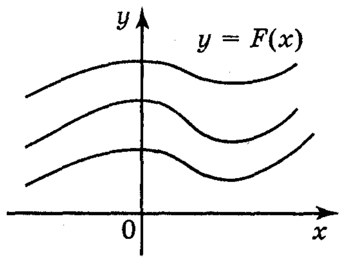

Рис. 87

Теореми 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції f одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі OY (рис. 87).

Нехай функція f має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку називають невизначеним інтегралом цієї функції і позначають $\int f(x)dx$. функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією.*

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx = F\{x) + C$, де $F(x)$ — яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку, C — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, тому можна записати, що

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

IV. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів).

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі (таблиця 9).

Таблиця 9 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція f(x)	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$