ЛЕКЦІЯ № 4

Тема: Корінь *n–го* степеня. Арифметичний корінь *n–го* степеня, його властивості. Степені з раціональними показниками, довільним дійсним показником, їхні властивості.

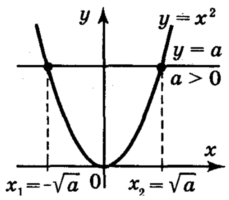
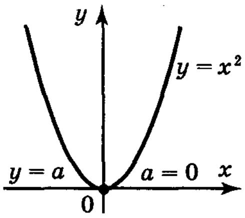
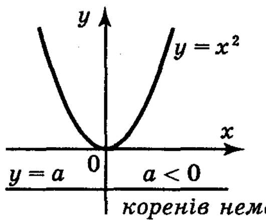
I. Повторення відомостей про квадратний корінь.

Повторити відомості про квадратний корінь.

Питання до групи

1. Що називається квадратним коренем з числа?
2. Чому дорівнює квадратний корінь з чисел:
   а) 25; б)16; в) 100; г) 0; д) -10?
3. Чому квадратний корінь з від'ємного числа не існує?
4. Що називається арифметичним квадратним коренем з числа а?
5. Виконайте вправу № 1 до розділу III.
6. При яких значеннях *a* має смисл вираз $\sqrt{a}$?
7. Виконання вправи № 5 до розділу III.
8. Виконання вправи № 2 до розділу III.

Таблиця 1

Квадратні корені	
Означення квадратного кореня з числа *a:* число, квадрат якого дорівнює *a*. **Корінь рівняння:** $x^2 = a.$    	***Означення*** арифметичного квадратного кореня з числа *a*: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$ **Тотожності** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a > 0.$ $\sqrt{a^2} = \mid a \mid,\ a \in \mathrm{R}.$ **Основні властивості** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,,\ a \geq 0\,,\ b \geq 0\,.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,,\ a \geq 0\,,\ b > 0\,.$ $\sqrt{a^{2k}} = a^k\,,\ a \geq 0\,, k \in \mathrm{N}.$ $\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}\,,\ a \geq 0$

II. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

! Коренем *n*-го степеня із дійсного числа *a* називається число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.

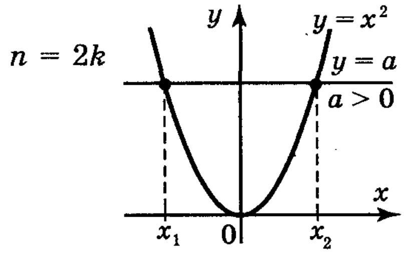
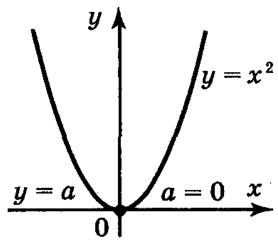
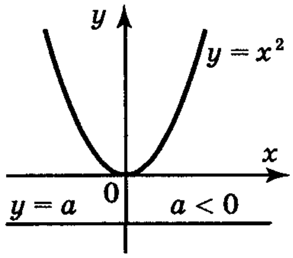
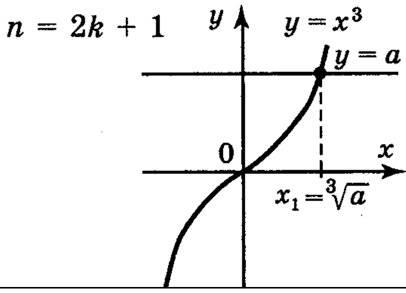
Наприклад: корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

Згідно даного означення, корінь n-го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Число коренів цього рівняння залежить від n і a.

Якщо n — парне, тобто $n = 2k$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

Якщо n — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

Таблиця 2

Корінь *n*-го степеня	
Означення кореня n-го степеня з числа a: число, n -й степінь якого дорівнює a. **Корінь рівняння:** $x^2 = a$	***Означення*** арифметичного кореня n-го степеня з числа a: $\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{a}=b\\ a\ge 0\\ n\in N, n\ge 2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge 0\\ b^n=a\end{cases}$
	$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, …, $\sqrt[2k+1]{a}$ - існують для $a\in R$. Якщо $a < 0$, то $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}$. $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, … , $\sqrt[2k]{a}$ - існують для $a \ge 0$. **Тотожності** Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a\rvert$, $a \in$ R $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $a \in$ R. **Основні властивості** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a\ge 0$, $b\ge 0$. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a\ge 0$, $b>0$.
	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Невід'ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем n-го степеня із числа a.

Арифметичним коренем n-го степеня із невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число n називають показником кореня, число a — підкореневим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають арифметичним квадратним коренем.

Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь n-го степеня, коротко говорять «корінь n-го степеня».

Приклад. Знайдемо значення: -

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має смисл, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$. Дійсно $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.

а) $\sqrt[3]{-8}$ = - $\sqrt[3]{8}$ = -2; б) $\sqrt[5]{-32}$ = - $\sqrt[5]{32}$ = -2 ; в) $\sqrt[3]{-27}$ = - $\sqrt[3]{27}$ = -3 .

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in R$ і може набувати будь-яких значень.

Виконання вправ

1. Вправа № 7 до розділу III.
2. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 = 64$; б) $x^5 = -\frac{1}{32}$; в) $x^4 = 81$; г) $x^6 = -64$; д) $x^3 = 15$; е) $x^4 = 15$.

Відповідь: а) 4; б) $-\frac{1}{2}$; в) 3; - 3; г) немає коренів; д) $\sqrt[3]{15}$; е) $\sqrt[4]{15}$; $-\sqrt[4]{15}$.

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \sqrt[4]{x-2}$; б) $y = \sqrt[3]{x-4}$; в) $y = \sqrt[6]{3-x}$;

г) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-x}}$; д) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{-x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[10]{-x}}$

Відповідь: а) $x \geq 2$; б) $x \in R$; в) $x \leq 3$; г) $x \neq 0$; д) 0; е) не визначена.

Безпосередньо з означення арифметичного кореня n-го степеня випливає:

1. Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$
3. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

Ми згадали властивості квадратного кореня. Аналогічні властивості мають і корені n-го степеня.

Властивість 1. Для невід'ємних чисел a і b добуток коренів n-го степеня із чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня із їх добутку: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Властивість 2. Для невід'ємного числа a і додатного числа b частка коренів n-го степеня із чисел a і b. дорівнює кореню n-го степеня із їх частки: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

Властивість 3. Будь-який цілий степінь k кореня n-го степеня із невід'ємного числа a дорівнює кореню n-го степеня із степеня k числа a: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

Властивість 4. Щоб добути корінь із кореня із невід'ємного числа можна перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Властивість 5. Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне і те саме натуральне число: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Властивості 1, 2 доводяться аналогічно тому, як це зроблено для квадратних коренів. Доведемо властивості 3—5:

3) Так як $a \geq 0$, то ліва і права частини формули невід'ємні. Тому для доведення цієї рівності досить впевнитися в тому, що n-ий степінь лівої частини дорівнює a^k. Згідно з властивостями степенів з цілим показником маємо:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$$

4) При $a > O$ ліва і права частини невід'ємні. Тоді

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Отже, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

5) Згідно з означенням кореня $\sqrt[np]{a^{mp}}$ — це таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a^{mp}, тобто досить довести $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = a^{mp}$.

Маємо $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = \left(a^m\right)^p = a^{mp}$.

Виконання вправ

1. Знайдіть значення виразів:

а) $\sqrt[3]{0{,}027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0081}$; в) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; д) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Відповідь: а) 1,5; б) 1,2; в) 0,5; г) 2,5; д) $\frac{3}{2}$.

2. Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; в) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Відповідь: а) 10; б) 6; в) 3; г) 2.

3. Знайдіть корінь із степеня:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}3^{10} \cdot 2^{15}}$; г) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot 4^{30}}$.

Відповідь: а) 125; б) 0,09; в) 0,72; г) 16.

4. Спростіть вирази:

а) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{25}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

Відповідь: а) $\sqrt[24]{25} = \sqrt[12]{5}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[6]{5}$.

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про винесення множника за знак радикала і внесення множника під знак радикала.

Вивчені властивості коренів дають змогу виконувати перетворення коренів.

1. Винесення множника з під знака радикала.

В деяких випадках підкореневий вираз розкладається на множники так, що із одного чи декількох із них можна добути точний корінь. Добувши корені із цих множників, одержані числа можна записати перед знаком кореня. Таке перетворення називається винесенням множника за знак радикала.

Наприклад:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}; \qquad \sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{64 \cdot 2} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[6]{2};$$

$$\sqrt[5]{a^7 \cdot b} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a^2 \cdot b} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^2 b} = a\sqrt[5]{a^2 b};$$

$$\sqrt[4]{a^6 b^3} = \sqrt[4]{a^4 a^2 b^3} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2 b^3} = |a|\sqrt[4]{a^2 b^3}.$$

Взагалі, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

Якщо a — довільне, то $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1} b} = a\sqrt[2k+1]{b}$; $\sqrt[2k]{a^{2k} b} = |a|\sqrt[2k]{b}$.

Виконання вправ

1. Винесіть множники за знак радикала:

а) $\sqrt[4]{162}$; б) $\sqrt[4]{1250}$; в) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4 5}$; г) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^5 5}$.

Відповідь: а) $3\sqrt[4]{2}$; б) $5\sqrt[4]{2}$; в) $(\sqrt[4]{2} - 1)\sqrt[4]{5}$; г) $(1 - \sqrt[4]{2})\sqrt[4]{5}$.

2. Винесіть множники за знак кореня, якщо $a > 0$, $b > 0$:

а) $\sqrt[3]{64a^8b^{11}}$; б) $\sqrt[4]{5a^{12}b^6}$; в) $\sqrt[3]{-128a^{10}}$; г) $\sqrt[3]{54a^9}$.

Відповідь: а) $4a^2b^3\sqrt[3]{a^2b^2}$; б) $a^3b\sqrt[4]{5b^2}$; в) $-4a^3\sqrt[3]{2a}$; г) $3a^3\sqrt[3]{2}$.

3. Винесіть множники за знак кореня:

а) $\sqrt[3]{64a^8b^{11}}$; б) $\sqrt[4]{64a^{12}b^6}$; в) $\sqrt[6]{a^6b}$; г) $\sqrt[3]{-128a^{10}}$.

Відповідь: а) $4a^2b^3\sqrt[3]{a^2b^2}$; б) $2|a|^3|b|\sqrt[4]{4b^2}$; в) $|a|\sqrt[6]{b}$; г) $-4a^3\sqrt[3]{2a}$.

---

2. Внесення множника під знак кореня.

Перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня, називається внесенням множника під знак кореня.

Наприклад: $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = \sqrt[3]{24}$; $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{81\cdot 2} = \sqrt[4]{162}$;

$a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3a} = \sqrt[3]{a^4}$, якщо $a > 0$;

$$a\sqrt[4]{b} = \begin{cases} \sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4b}, & \textit{якщо } a \ge 0, \\ -\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4b}, & \textit{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Взагалі:

1) Якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$.

2) Якщо a — довільне, то $a^{2k+1}\sqrt{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}$;

$$a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \textit{якщо } a \ge 0, \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \textit{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Виконання вправ

1. Внесіть множник під знак кореня:

а) $3\sqrt[4]{3}$; б) $-2\sqrt[6]{3}$; в) $(1-\sqrt{3})\sqrt[3]{2}$; г) $(1-\sqrt{3})\sqrt[4]{2}$.

Відповідь: а) $\sqrt[4]{243}$; б) - $\sqrt[6]{192}$; в) $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3\cdot 2}$; г) - $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4\cdot 2}$.

2. Внесіть множники під знак кореня, якщо $a > 0$, $b > 0$:

а) $-b\sqrt[4]{3}$; б) $ab\sqrt[8]{\dfrac{5b^3}{a^7}}$; в) $a\sqrt[4]{7}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}$.

Відповідь: а) $-\sqrt[4]{3b^4}$; б) $\sqrt[8]{5ab^{11}}$; в) $\sqrt[4]{7a^4}$; г) $\sqrt[3]{4a^3b^3}$.

3. Внесіть множники під знак кореня:

а) $a\sqrt[4]{a}$; б) $a\sqrt{2}$; в) $-ab\sqrt[4]{a}$.

Відповідь: а) $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt{2a^2}$, якщо $a \ge 0$, $-\sqrt{2a^2}$, якщо $a < 0$;

в) $-\sqrt[4]{a^5b^4}$, якщо $b \ge 0$, $\sqrt[4]{a^5b^4}$, якщо $b < 0$.

IV. Сприймання і усвідомлення зведення радикалів до найпростішого вигляду, поняття подібних радикалів.

Будемо вважати, що радикал приведено до простішого вигляду, якщо: підкореневий вираз не містить дробів; раціональні множники винесено за знак кореня, показник кореня і показник степеня підкореневого виразу скорочено на їхній найбільший спільний множник.

Приклад. Приведемо радикали до простішого вигляду:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{b^3}}=\dfrac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}$; 2) $\sqrt[4]{16a^4y}=2|a|\sqrt[4]{y}$.

Радикали називаються подібними, якщо після приведення їх до простішого вигляду вони мають рівні підкореневі вирази і однакові показники.

Наприклад, подібними є радикали: а) $3\sqrt{2}$;$a\sqrt{2}$; $\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$; б) $5\sqrt[3]{ab}$; $\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{ab}$; $(a-1)\sqrt[3]{ab}$.

Раціональний множник, який стоїть перед знаком радикала, називається коефіцієнтом. Наприклад, $3\sqrt{5}$. У цьому виразі 3 є коефіцієнтом.

Щоб стверджувати, що радикали подібні чи ні, їх треба привести до простішого вигляду.

Наприклад, $\sqrt[3]{54}$ і $\sqrt[3]{16}$ подібні, оскільки $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$, а $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}$.

V. Сприймання і усвідомлення матеріалу про порівняння радикалів.

Для порівняння радикалів застосовується теорема:

! ***Теорема:*** Якщо $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, тобто більшому додатному підкореневому виразу відповідає і більше значення кореня.

Доведення

Проведемо доведення методом від супротивного. Припустимо, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Тоді за властивістю степенів з натуральним показником маємо $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n < \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, тобто $a < b$. А це суперечить умові $a > b$.

Приклад. Порівняємо числа $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$.

Подамо $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$ у вигляді коренів з одним і тим самим показником:

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$, а $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27}$. Згідно з доведеною теоремою, так як $32 > 27$, то $\sqrt[15]{32} > \sqrt[15]{27}$, а отже, $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$.

Виконання вправ

1. Порівняйте числа: а) $\sqrt[12]{0{,}4}$ і $\sqrt[12]{\dfrac{5}{12}}$; б) $\sqrt[8]{0{,}2}$ і $\sqrt[8]{0{,}3}$; в) $\sqrt[5]{\pi}$ і $\sqrt[5]{\dfrac{10}{3}}$; г) $\sqrt[5]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$.

Відповідь: а) $\sqrt[12]{0{,}4} < \sqrt[12]{\dfrac{5}{12}}$; б) $\sqrt[8]{0{,}2} < \sqrt[8]{0{,}3}$; в) $\sqrt[5]{\pi} < \sqrt[5]{\dfrac{10}{3}}$; г) $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{3}$.

2. Що більше: а) $\sqrt[3]{5}$ чи $\sqrt[5]{3}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$ чи $\sqrt[10]{10}$; в) $\sqrt{5}$ чи $\sqrt[8]{500}$; г) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ чи $\sqrt{2}$?

Відповідь: а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[10]{10}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$?

3. Що менше: а) $\sqrt[3]{-2}$ чи $\sqrt[3]{-4}$; б) $\sqrt[3]{-5}$ чи $\sqrt[5]{-3}$?

Відповідь: а) $\sqrt[3]{-4}$; б) $\sqrt[3]{-5}$.

Безпосередньо з доведеної теореми випливає:

1) Якщо $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ і $\sqrt[n]{a} < a$.

2) Якщо $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ і $\sqrt[n]{a} > a$.

3) $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{a+b}$, при умові $a > b \geq 0$, або $b > a \geq 0$.

<u>Виконання вправ</u>

1. Визначте знак виразу: а) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} - 1$; б) $\sqrt[7]{1{,}2} - 1$; в) $\sqrt[3]{5} - 5$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$.

Відповідь: а) – ; б) + ; в) – ; г) + .

2. Розташуйте в порядку зростання:

а) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{18}$; б) $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[15]{30}$; в) $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$; $\sqrt[10]{25}$.

Відповідь: а) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{18}$; $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[15]{30}$; $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$; $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[10]{25}$.

VI. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу (дії над радикалами).

1. Додавання і віднімання радикалів виконується так само, як і додавання і віднімання раціональних одночленів (многочленів).

Приклади:

$$3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} + 12\sqrt{50} = 3\cdot2\sqrt{2} - 5\cdot3\sqrt{2} + 12\cdot5\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 60\sqrt{2} = 51\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{320} - (2\sqrt[3]{135} - 3\sqrt[3]{40}) = 4\sqrt[3]{5} - 2\cdot3\sqrt[3]{5} + 3\cdot2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}.$$

2. При множенні (діленні) радикалів з різними показниками спочатку їх треба привести до одного показника, а потім перемножити (поділити) підкореневі вирази і записати добуток (частку) під знак кореня з тим самим показником.

Приклади:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3}{16}}; \quad \sqrt[3]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\frac{3^4\cdot2^2}{2^3\cdot3^3}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}.$$

3. При піднесенні радикала до степеня, можна піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши той самий показник кореня.

Наприклад:

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}.$$

4. Щоб добути корінь із радикала, можна із підкореневого виразу добути корінь з показником, що дорівнює добутку двох даних показників.

Наприклад:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)}} = \sqrt[21]{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)} = \sqrt[21]{10-9} = 1.$$

5. У деяких задачах корисно звільнятися від ірраціональних виразів у знаменнику дробу.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу — це означає перетворити дріб, знаменник якого містить корені, до нового дробу, тотожно рівному даному, знаменник якого коренів не містить.

Якщо знаменник дробу являє собою радикал чи добуток радикала на раціональний множник, то слід чисельник і знаменник дробу домножити на таку степінь кореня того самого показника, щоб отримати степінь з показником, що дорівнює показнику кореня.

Наприклад:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{3\sqrt[4]{8}}{2};\quad \frac{4a^2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{4a^2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{4a^2\sqrt[3]{a^2}}{a}=4a\sqrt[3]{a^2}.$$

Якщо знаменник дробу є сума (або різниця) квадратних радикалів, то дріб можна привести до раціонального вигляду, помноживши чисельник і знаменник на різницю (або на суму) тих самих радикалів.

Наприклад:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{\sqrt{15}+3}{2};$$

$$\frac{a}{1-\sqrt{a}}=\frac{a\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{a\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)}{1-a}, \text{ якщо } a\ \geq\ 0,\ a\neq 1.$$

Якщо знаменник дробу є сума (різниця) кубічних радикалів, то, щоб позбутися ірраціональності в знаменнику, слід домножити чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат різниці (суми) тих самих радикалів.

Наприклад:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{2-3}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{-1}=-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}.$$

VII. Повторення і систематизація знань студентів про степінь з натуральним і цілим показником.

Повторення і систематизацію знань студентів про степінь із натуральним і цілим показником

Питання до групи:

1. Що називається n-м степенем числа a, якщо $n \in N$? якщо $n = 1$? $n = 0$?
2. Що таке степінь, основа степеня, показник степеня?
3. Що називається n-м степенем числа a, якщо $n \in Z$?
4. Сформулюйте основні властивості степенів.

Таблиця 3

<table>
<tr><td colspan="2" align="right">Степені</td></tr>
<tr><td align="center">з натуральним показником:
$a^1 = a\ (a \in R)$
$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \quad n \in N,\ n > 2$</td><td align="center">з цілим показником
$a^0 = 1,\ a \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in N$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Властивості
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$</td></tr>
</table>

VIII. Формування поняття степеня з дробовим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником. Вводячи це поняття, хотілося би, щоб степінь з раціональним показником мав ті самі властивості, що й степінь із цілим показником. Зокрема, n-й степінь числа $a^{\frac{m}{n}}$ повинен дорівнювати a^m. Якщо ця властивість виконується, то $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$ – а це означає (за означенням кореня n-го степеня), що число $a^{\frac{m}{n}}$ повинно бути коренем n-го степеня із числа a^n.

Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ числа $a > 0$ з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ ($n>1$) називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Отже, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь числа 0 визначений тільки для додатних показників; за означенням ($0^r = 0$ для будь-якого $r > 0$.

Виконання вправ

1. Подайте вирази у вигляді степеня з раціональним показником:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{6}$; в) $\frac{1}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}$.

Відповідь: а) $2^{\frac{1}{2}}$; б) $6^{\frac{1}{3}}$; в) $2^{-\frac{1}{7}}$; г) $x^{-\frac{2}{5}}$.

2. Подайте вирази у вигляді кореня із числа чи виразу:

а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $5x^{\frac{1}{3}}$; в) $6x^{-\frac{2}{3}}$; г) $3(x-y)^{-\frac{1}{2}}$.

Відповідь: а) $\sqrt[3]{25}$; б) $5\sqrt[3]{x}$; в) $\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{x-y}}$.

3. Обчисліть:

а) $9^{\frac{1}{2}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $8^{\frac{2}{3}}$; г) $81^{\frac{3}{4}}$.

Відповідь: а) 3; б) 3; в) 4; г) 27.

IX. Вивчення властивостей степенів з раціональним показником.

Для будь-яких раціональних чисел p і q і будь-яких додатних a і b справедливі рівності:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+qn};$$
$$a^p : a^q = a^{p-q};$$
$$(a^p)^q = a^{pq};$$
$$(ab)^p = a^p b^p;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^з = \frac{a^з}{b^з}.$$

Для доведення цих властивостей треба скористатися означенням степеня з раціональним показником і властивостями коренів. Доведемо першу рівність: нехай $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{r}{s}$, тоді

$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot a^{rn}} = \sqrt[ns]{a^{ms+rn}} = a^{\frac{ms+rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^{p+q}$ Останні рівності доводяться аналогічно.

Виконання вправ № 99 (2), 100 (2), 101 (2), 103 (3, 4).

X. Сприймання поняття про степінь з ірраціональним показником.

Розглянемо степінь $10^{\sqrt{2}}$ з ірраціональним показником $\sqrt{2}$. Ірраціональне число $\sqrt{2}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Розглянемо послідовність наближень числа $\sqrt{2}$:

$1 < \sqrt{2} < 2$,

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415,$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$
$$\ldots$$

За допомогою калькулятора знайдемо наближені значення степенів числа 10 з недостачею і надлишком, тоді матимемо:

$$10 = 10^1 < 10^{\sqrt{2}} < 10^2 = 100,$$
$$25{,}119 \approx 10^{1{,}4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}5} \approx 31{,}623,$$
$$25{,}704 \approx 10^{1{,}41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}42} \approx 26{,}303,$$
$$25{,}942 \approx 10^{1{,}414} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}415} \approx 26{,}002,$$
$$25{,}953 \approx 10^{1{,}4142} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1{,}4143} \approx 25{,}960,$$

Наведені значення з недостачею і надлишком наближаються до одного і того самого числа $10^{\sqrt{2}}$ = 25,9..., яке і прийнято вважати степенем числа 10 з показником $\sqrt{2}$.

Таким чином, ми розширили поняття степеня на будь-які дійсні показники, зберігаючи при цьому властивості степенів.

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ1, §3.

ст.28-32, §4. 36-39, §5. 46-51.