

## ЛЕКЦІЯ №2

**Тема заняття:** Монотонність, парність і непарність функцій. Неперервність функції.

### I. Систематизація і узагальнення знань студентів про спадні, зростаючі функції.

**!** Функція  $y = f(x)$  називається зростаючою (рис. 4), якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких значень  $x_1$  і  $x_2$  з області визначення функції таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$  і навпаки: із того, що  $f(x_1) < f(x_2)$  виконується нерівність  $x_1 < x_2$ .

**!** Функція  $y = f(x)$  називається спадною (рис. 5), якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких значень  $x_1$  і  $x_2$  з області визначення функції таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується нерівність  $f(x_1) > f(x_2)$  і навпаки: якщо  $y = f(x)$  — спадна, то із того, що  $f(x_1) > f(x_2)$ , виконується нерівність  $x_1 < x_2$ .

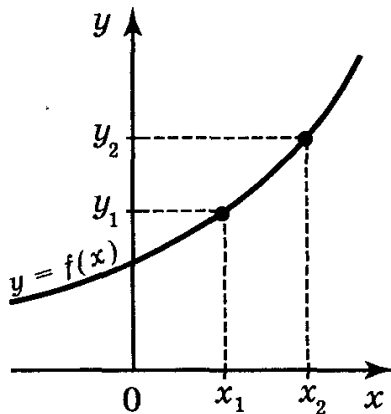


Рис. 4

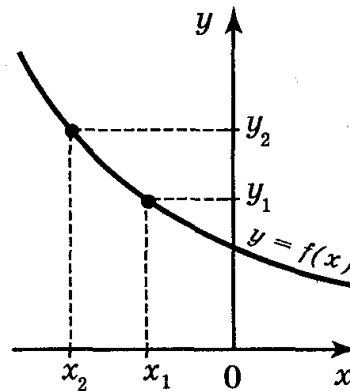


Рис. 5

### Виконання вправ.

1. Користуючись графіками функцій, зображених на рисунку 6, укажіть проміжки зростання і спадання функцій.

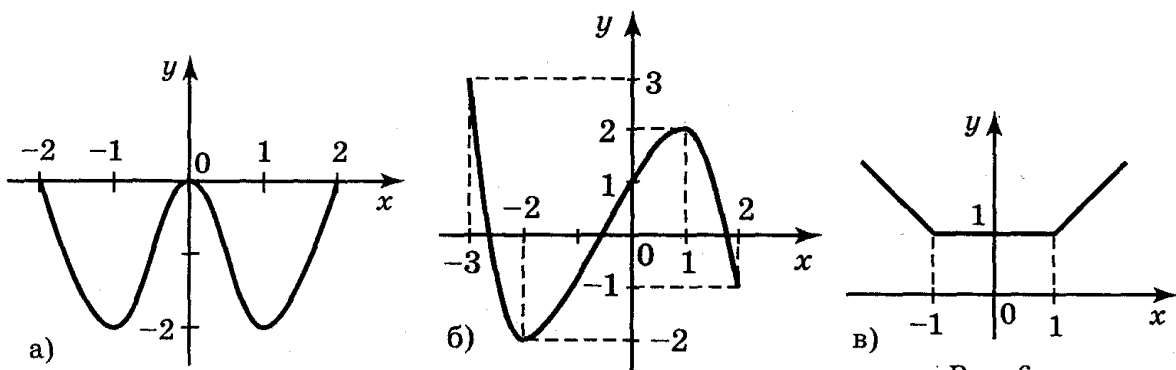


Рис. 6

**Відповідь:**

- а) на кожному з проміжків  $[-1;0]$ ,  $[1;2]$  функція зростає, на кожному з проміжків  $[-2;-1]$ ,  $[0;1]$  функція спадає;
- б) на кожному з проміжків  $[-3;-2]$ ,  $[1;2]$  функція спадає; на проміжку  $[-2;1]$  функція зростає;

в) на проміжку  $(-\infty; -1]$  функція спадає, на проміжку  $[-1; 1]$  функція постійна, на проміжку  $[1; +\infty)$  функція зростає.

2. Функція  $y = f(x)$  зростаюча. Порівняйте:

а)  $f(10)$  і  $f(-10)$ ; б)  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  і  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Відповідь: а)  $f(10) > f(-10)$ ; б)  $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

3. Функція  $y = f(x)$  — спадна на  $R$ . Порівняйте:

а)  $f(10)$  і  $f(-10)$ ; б)  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  і  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Відповідь: а)  $f(10) < f(-10)$ ; б)  $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

4. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а)  $y = x - 3$ ; б)  $y = -x + 3$ ; в)  $y = x^2 + 1$ ; г)  $y = -x^2 + 1$ .

Відповідь:

а) зростає на  $R$ ; б) спадає на  $R$ ;

в) зростає на проміжку  $[0; +\infty)$  і спадає на проміжку  $(-\infty; 0]$ ;

г) зростає на проміжку  $(-\infty; 0]$  і спадає на проміжку  $[0; +\infty)$ .

## II. Систематизація і узагальнення знань студентів про парні та непарні функції.

**!** Функція  $y = f(x)$  називається парною, якщо для будь-якого значення  $x$  із  $D(y)$  значення  $-x$  також належить  $D(y)$  і виконується рівність  $f(-x) = f(x)$ .

Графік парної функції симетричний відносно осі ОУ (рис. 7).

**Приклад 1.** Чи парна функція  $f(x) = x^4 + x^2$  ?

Оскільки  $D(f) = R$  і  $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$ , функція парна.

**Приклад 2.** Чи парна функція  $f(x) = x^2 + x$  ?

Оскільки  $D(f) = R$ , але  $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ , то функція не є парною.

**!** Функція  $y = f(x)$  називається непарною, якщо для будь-якого значення  $x$  із  $D(y)$  значення  $-x \in D(y)$  і виконується рівність  $f(-x) = -f(x)$ .

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 8).

**Приклад 3.** Чи непарна функція  $f(x) = x^3 - x^5$  ?

Оскільки  $D(f) = R$  і  $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$ , функція непарна.

**Приклад 4.** Чи непарна функція  $f(x) = x^3 - x^2$  ?

Оскільки  $D(f) = R$  і  $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2) \neq f(x) = -x^3 + x^2$ , функція не є непарною.

### Виконання вправ

1. Які із функцій, графіки яких показано на рисунку 9, є парними, а які

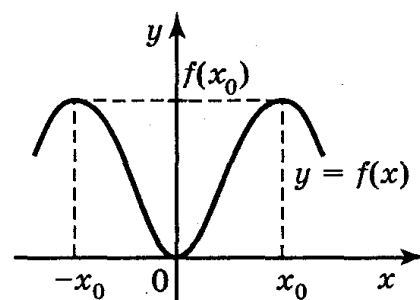


Рис. 7

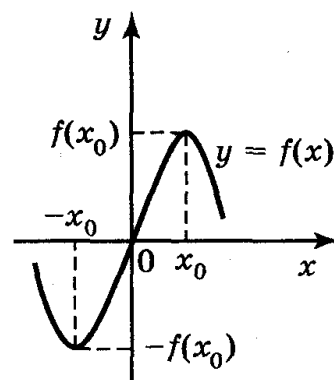


Рис. 8

непарними?

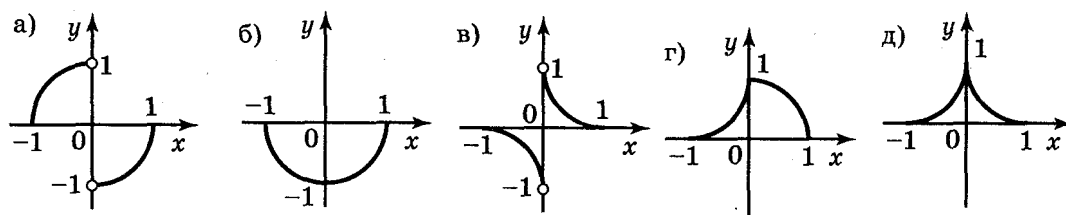


Рис. 9

Відповідь: непарні — а), в); парні — б) д).

2. Які із поданих функцій а)  $y = x^3 + 2x^7$ ; б)  $y = \sqrt{x+1}$ ; в)  $y = |x|$ ;

г)  $y = 3x^2 + x^6$ ; д)  $y = x + 1$ ; е)  $y = |x| + 1$  є парними, а які — непарними?

Відповідь: парні — в), г); е); непарні — а).

### III. Сприймання поняття неперервності функції в точці та на проміжку.

Розгляньте графіки функцій, зображених на рис. 15.

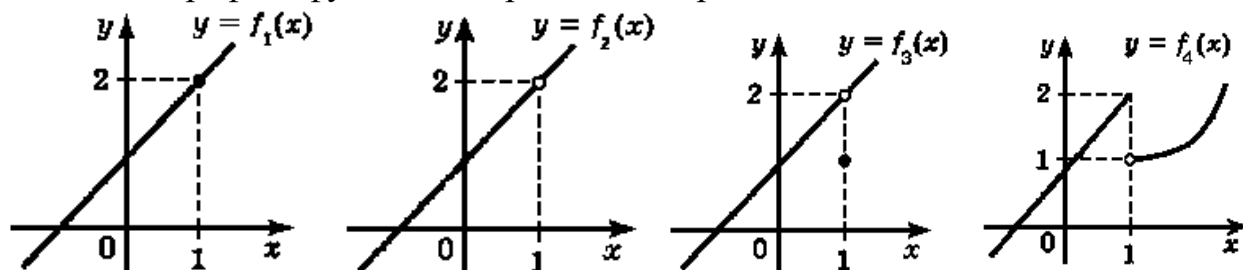
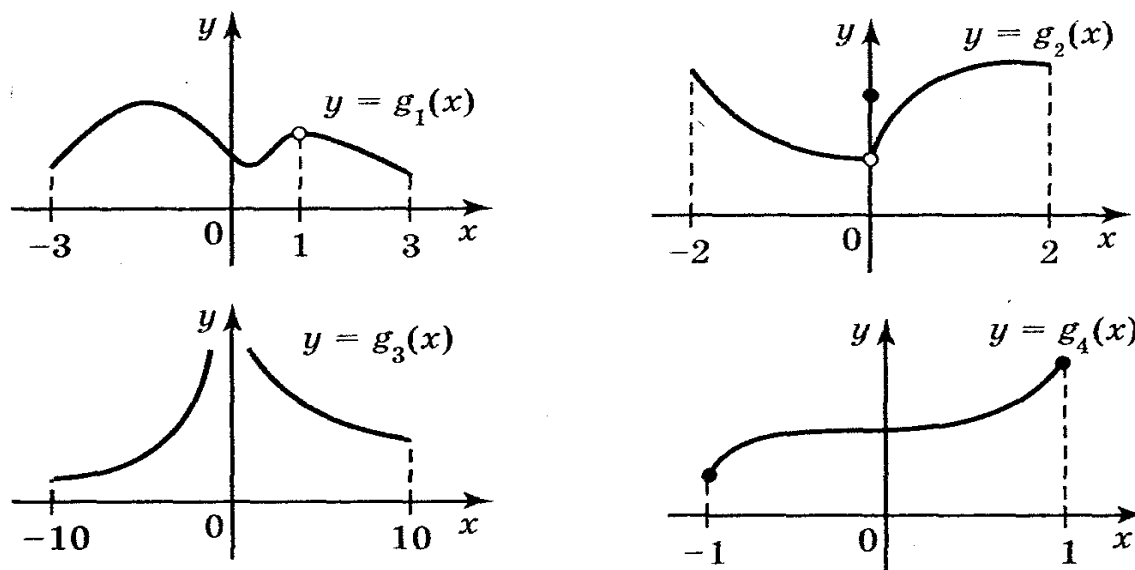


Рис. 15

Які із цих графіків можна накреслити, не відриваючи олівця від аркуша паперу?

Точки, у яких при побудові графіка відриваємо олівець від паперу, називають точками розриву, а функцію – розривною в цій точці.

На рис. 15 розривними функціями є функції  $f_2, f_3, f_4$ , які мають розрив в точці  $x = 1$ .



В усіх останніх точках області визначення функцій  $f_2, f_3, f_4$  ці функції не

мають розриву. Отже, в інших точках функції  $f_2, f_3, f_4$  неперервні, функція  $f_1$  неперервна в кожній точці. Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то говорять, що функція неперервна на цьому проміжку.

Використовуючи графіки функцій (рис. 16) укажіть точки розриву функцій і назвіть проміжки неперервності.

### Виконання вправ

1. Які із функцій, графіки яких зображено на рисунку 17, неперервні, а які розривні в точці  $O$ ?

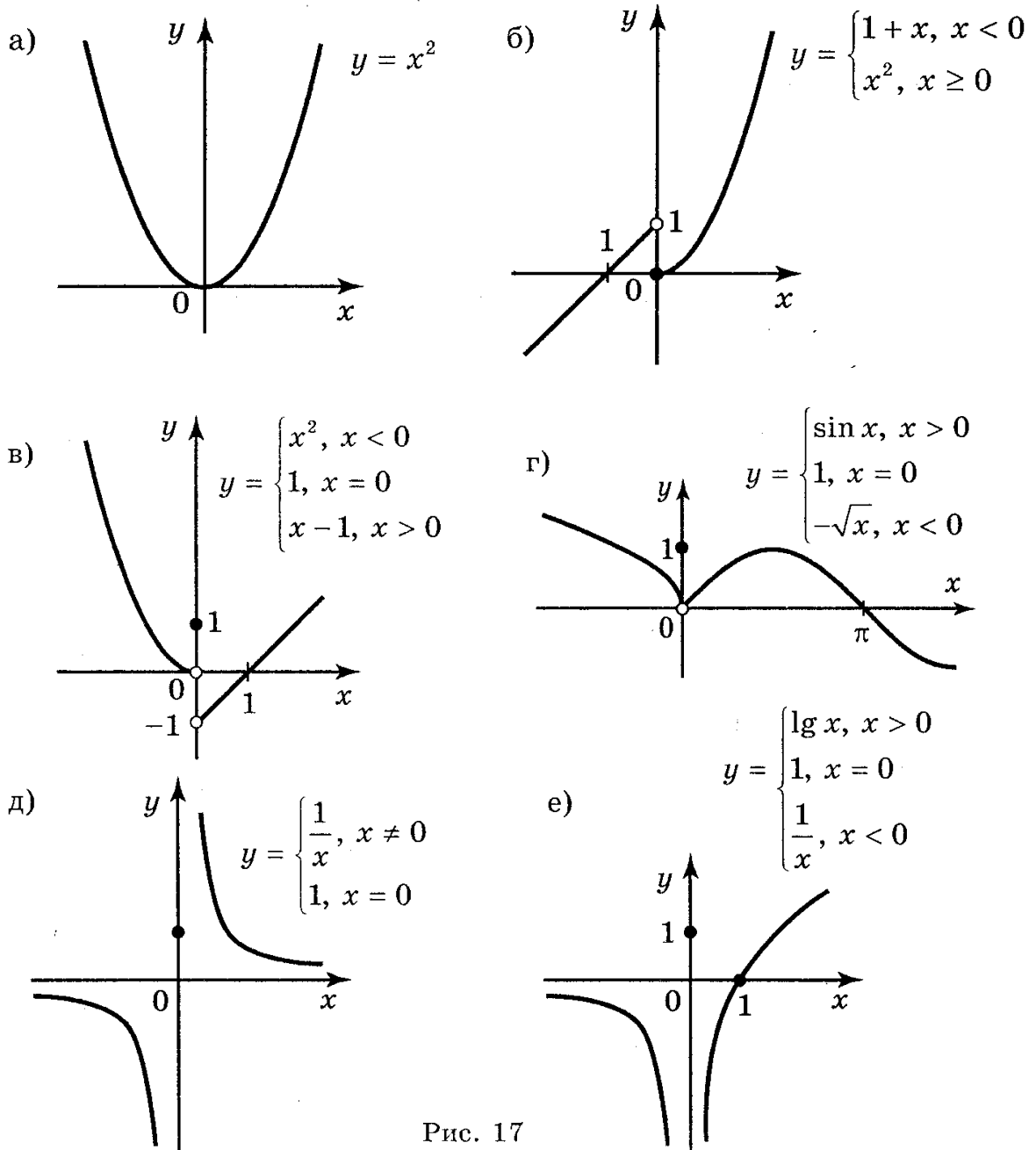


Рис. 17

*Відповідь:* неперервна функція зображена на рис. а; останні функції розривні в точці  $O$ .

2. Укажіть проміжки неперервності функцій  $f$  і  $g$ , зображених на рис. 18.

*Відповіді:* функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжках  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ , функція  $y = g(x)$  неперервна на проміжках  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

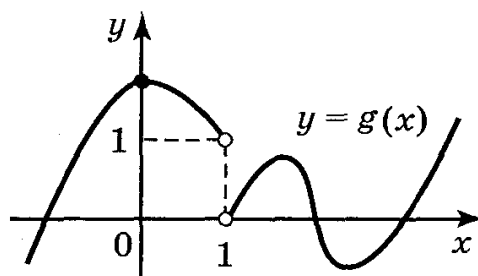
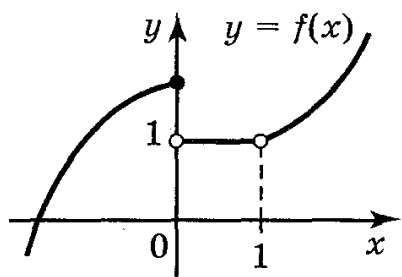


Рис18

3. Побудуйте графік функції  $y = f(x)$ . Чи міститься в області визначення функції точка, в якій функція не є неперервною?

а)  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq -1, \\ 1 - x^2, & x > -1; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 4 - x^2, & x \leq 0; \end{cases}$

в)  $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 1, \\ \lg x, & x \geq 1; \end{cases}$

г)  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq -1, \\ 2, & x > -1. \end{cases}$

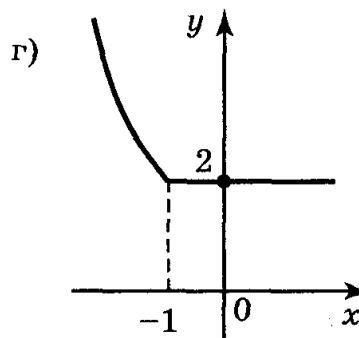
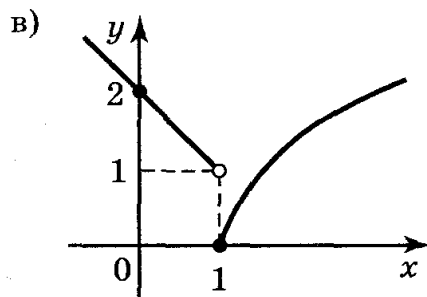
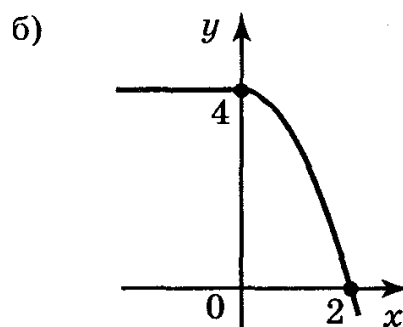
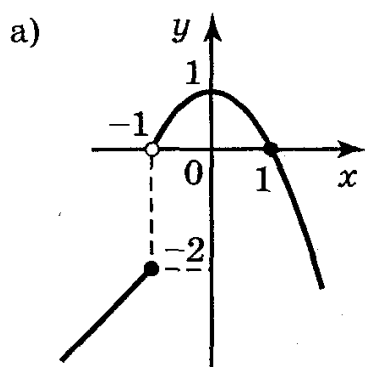


Рис. 19

Відповідь: а) Рис. 19, а, функція розривна в точці  $x = -1$ ;

б) Рис. 19, б, функція неперервна для  $x \in \mathbb{R}$ ;

в) Рис. 19, в, функція розривна в точці  $x = 1$ ;

г) Рис. 19, г, функція неперервна для  $x \in \mathbb{R}$ .

**Домашнє завдання.**  
[Істер, О. С.]  
*Розділ 1, §2. ст.16-26.*