ЛЕКЦІЯ № 3

Тема заняття: Дискретна випадкова величина, закон її розподілу. Математичне сподівання дискретної випадкової величини. Вибіркові характеристики.

Мета заняття: Ознайомити студентів з поняттям дискретної випадкової величини, закону її розподілу. Дати поняття про математичне сподівання дискретної випадкової величини та вибіркові характеристики.

1. Дискретна випадкова величина та її закон розподілу ймовірностей

Дискретною випадковою величиною називається така величина, множина можливих значень якої або скінченна, або зліченна (множина, елементи якої можуть бути пронумеровані), або це така випадкова величина, що приймає лише окремі (ізольовані) одна від одної значення, які можна пронумерувати. Складемо числову модель такої випадкової величини.

Нехай несумісні події $w_1, w_2, \ldots w_n$ утворюють повну групу. Введемо поняття випадкової величини таким чином: якщо відбувається подія w_i, то випадкова величина X набирає значення x_i $(i=\overline{1,n})$. Отже X є функція на множині подій $w_1 \ldots w_n$ $(i=\overline{1,n})$, тобто $X(w_i)=x_i$.

Тепер, замість того, щоб говорити “відбулася подія w_i”, ми скажемо “відбулася подія $X=x_i$ “. Нехай $P(w_i)$ – ймовірність появи події w_i Тепер цю ж ймовірність позначимо так: $P(X=x_i)=p_i$, тобто $P(w_i)=P(X=x_i)=p_i$.

Після такого означення випадкової величини X, замість того, щоб говорити «маємо повну групу несумісних подій $w_1, w_2, \ldots w_n$ з ймовірностями $P(w_1), P(w_2), \ldots P(w_n)$», скажемо «маємо випадкову величину X, яка набирає значень $x_1, x_2, \ldots x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots p_n$». При цьому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

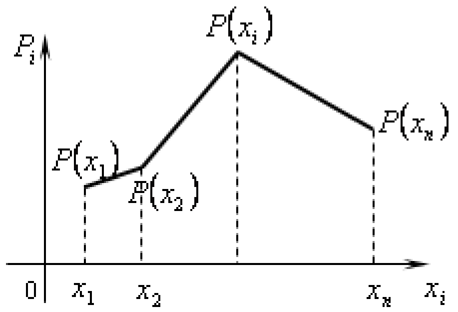
Найпростішою формою опису випадкової величини є таблиця, яку називають *рядом розподілу* випадкової величини.

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . .	p_n

Отже законом розподілу дискретної випадкової величини називається співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

Випадкові величини надалі будемо позначати великими буквами латинського алфавіту X, Y, Z, ..., а їх можливі значення – малими x, y, z,...

Для наочності ряд розподілу задають графічно: можливі значення випадкової величини відкладають на осі абсцис, а на осі ординат – відповідні ймовірності. Одержані точки з’єднують відрізками прямих і таку фігуру називають полігоном розподілу.



Запишемо закон розподілу для <u>прикладу 1:</u>

X	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

<u>Прикладу 2</u> $\left(P = \frac{1}{2}\right)$:

X	0		1	. . .	N
P	$C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$	. . .	$C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

<u>Прикладу 3:</u>

X	1	2	$\frac{1}{2^3}$	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$		...	$\frac{1}{2^n}$	...

2. Числові характеристики випадкових величин

Відомо, що закон розподілу повністю характеризує випадкову величину з ймовірносної точки зору. Знаючи закон розподілу випадкової величини, можна вказати, де розміщуються можливі значення випадкової величини і яка ймовірність появи її в тому чи іншому інтервалі.

Проте при розв’язанні багатьох задач нема необхідності характеризувати випадкову величину повністю, а досить мати про неї тільки деяке загальне уявлення. Часто буває досить вказати не весь закон розподілу, а лише його деякі характерні риси.

В теорії ймовірностей для загальної характеристики випадкових величин використовуються деякі величини, що носять назву числових характеристик випадкової величини.

Основне їх призначення – в стислій формі виразити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілу.

Про кожну випадкову величину необхідно перш за все знати її деяке середнє значення, біля якого групуються всеможливі значення випадкової величини, а також яке-небуть число, що характеризує ступінь розкидання (розсіювання) цих значень відносно середнього. Крім вказаних числових характеристик, для більш повного опису випадкової величини використовують і ряд інших характеристик. Всі вони допомагають в певній мірі вияснити характерні риси розподілу випадкової величини. Розглянемо найбільш часто вживані числові характеристики.

1. Математичне сподівання. Математичне сподівання є важливою характеристикою розміщення випадкової величини, його часто називають просто середнім значенням випадкової величини.

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину X, що має всеможливі значення $x_1, x_2, \dots x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots p_n$.

Тоді математичне сподівання випадкової величини X, яке позначають $M[X]$ визначається рівністю:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad . \qquad (1)$$

Якщо дискретна випадкова величина X приймає нескінченну зліченну множину значень $x_1, x_2, \dots x_{n\dots}$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots p_{n\dots}$, то її математичне сподівання є:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad . \qquad (2)$$

Отже, математичним сподіванням випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Нижче буде показано, що математичне сподівання наближено рівне середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини, і тим точніше, чим більше число спостережень.

Розглянемо приклад, який з’ясовує доцільність прийнятого означення математичного сподівання.

Приклад1. Для розіграшу лотереї було випущено N білетів, з них m_1 з виграшем x_1 грн., m_2 білетів з виграшем x_2 грн., … m_n білетів з виграшем x_n грн. $(m_1+m_2+\ldots+m_n=N)$. Яка ціна білета, якщо сума грошей, виручених від продажу білетів, дорівнює сумі усіх виграшів?

Рішення. Якщо позначити шукану ціну білета через a, то за умовою:

$$Na=m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n,$$

звідки

$$a=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{N},$$

тобто ціна одного білета дорівнює “середньому виграшу”. Останню формулу можна записати й інакше. Покладемо $p_i=\frac{m_i}{N}$, очевидно, p_i - це ймовірність того, що на вибраний наугад білет, випаде виграш x_i грн. Тоді ця формула запишеться так:

$$a=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m_x.$$

2. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

Для характеристики випадкової величини недостатньо знати лише її математичне сподівання, так як одному і тому ж математичному сподіванню може відповідати нескінченна множина випадкових величин з різними законами розподілу.

Значення випадкових величин завжди коливається біля середнього значення. Це явище називається розсіюванням величини біля її середнього значення.

Основними характеристиками розсіювання випадкової величини є середнє квадратичне відхилення.

Означення. Дисперсією D[X] випадкової величини *X* називається математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D[X]=M(X-M[X])^2=var(X).$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія виражається сумою:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2p_i=var(X) \qquad (1)$$

Дисперсія випадкової величини є зручною характеристикою розсіювання, але вона має той недолік, що має розмірність квадрату випадкової величини.

Для більшої зручності вводиться характеристика, що має розмірність випадкової величини, а саме – корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{var(X)}, \qquad (3)$$

і її називають середнім квадратичним відхиленням, або стандартом.

<u>**Зауваження.**</u> Якщо брати математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, то отримуємо завжди:

$$M(X - M[X]) = 0.$$

Цей результат є цілком природним, він показує, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання як вправо, так і вліво, а тому додатні та від'ємні значення знищуються і він ніякої характеристики розсіювання не дає.

3. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Задають дискретні випадкові величини за допомогою закону розподілу, коли задаються ймовірності їх можливих випадкових значень (див. §1). Залежно від того, за якою формулою будуть обчислюватися ймовірності P_i, ці закони будуть мати свою назву.

Біноміальний розподіл – це закон розподілу випадкових величин, заданий таблицею, у якій ймовірності P_i обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P_i = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{o,n}.$$

X	0	1	...	i	...	n
p	q^n	$C^1{}_n p\ q^{n-1}$	...	$C^1{}_n p^i\ q^{n-1}$	...	p^n

де p, n, $q = 1\text{-}p$, називаються араметрами розподілу.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має біноміальний розподіл відповідно рівні:

$$M(x) = np, \qquad D(x) = npq.$$

<u>Приклад 1.</u> Митний пост дає статистичну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, який підлягає оподаткуванню. Якщо випадково відібрати 5 осіб, то записати закон розподілу

випадкової величини X – кількість осіб, що не декларують весь товар, привезений з-за кордону та знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Рішення. В даному випадку *p=0,2; q=0,8; n=5*.

Тоді $p_5(i) = C_5^i (0,2)^i (0,8)^{5-i}, \quad i = \overline{0,5}$

X	0	1	2	3	4	5
P	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0032

$M(X) = np = 510,2 = 1; \quad D(X) = npq = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,8, \quad \sigma_x = \sqrt{0,8} \approx 0,9$