ЛЕКЦІЯ №2

Тема заняття: Випадковий дослід і випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події (Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне означення ймовірностей). Використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій.

I. Сприймання і усвідомлення понять: випробування, випадкова подія, вірогідна подія, неможлива подія.

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття. Тоді були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку. До таких ігор належать ігри з кубиками, гра в «орлянку», деякі карточні ігри. Б. Паскаль і П. Ферма в листуванні з приводу задач, які виникли в зв'язку з азартними іграми, запровадили поняття ймовірності. Для розв'язання таких задач існуючий тоді математичний апарат виявився недостатнім, і було закладено основи нової науки. Нині теорія ймовірностей широко застосовується в фізиці і в біології, у техніці, в різних галузях народного господарства.

Первісним поняттям теорії ймовірності є поняття події.

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: А, *В, С*... Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (чи не відбувається) подія.

Наприклад, випробування — підкидання монети, події: А — «поява герба», *В* — «поява цифри»; випробування — підкидання кубика, події: А — «поява 1 очка», *В* — «поява 2 очок», *С* — «поява 3 очок», *D* — «поява 4 очок», *Е* — «поява 5 очок»,*G* — «поява 6 очок».

Виконання вправ

1. Відокремте події і випробування та запишіть результат у таблицю 17:

а) тягнемо екзаменаційний білет, випадає білет № 3;

б) дістаємо лампу з коробки, вона бракована;

в) набираємо навмання телефонний номер· і чуємо голос знайомого;

г) відкриваємо поштову скриньку і знаходимо лист;

д) стріляємо і влучаємо в ціль.

Таблиця 17

	Випробування	Подія
а		
б		
в		
г		
д		

2. Наведіть свої приклади випробувань і подій.

! *Випадковою* подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Наприклад: під час витягування навмання однієї карти з колоди ви взяли короля. Подія А — «взято короля» є випадковою.

Випадкові події можуть бути масовими та одиничними.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені (можна спостерігати) необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах в серії пострілів; поява бракованих деталей при серійному випуску; радіоактивний розпад атомів речовин і т. д.

Прикладом одиничної випадкової події є падіння Тунгуського метеорита.

Теорія ймовірностей вивчає лише масові випадкові величини.

! *Вірогідною* називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика натурального числа, меншого за 7» — є вірогідною.

! *Неможливою* називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, подія А — «поява на одній із граней грального кубика цифри 7».

Виконання вправ

1. Наведіть приклади вірогідних подій.
2. Наведіть приклади неможливих подій.
3. Які із подій є вірогідними:
   А — «два попадання при трьох пострілах»;
   Б — «навмання вибране трицифрове число не більше 1000»;
   С — «випадання 12 очок при киданні двох гральних кубиків»;
   E — «випадання цифри 3 при киданні монети»?
4. Які із подій є неможливими:
   А — «випадання 13 очок при киданні двох гральних кубиків»;
   B — «поява слова «мама» при випадковому наборі букв а, а, м, м».
   С — «чотири попадання при трьох пострілах»;
   D — «поява на одній грані грального кубка числа 8»?
5. Виконайте завдання 1 із підручника (стор. 491).
6. Вкажіть вірогідні, випадкові і неможливі події, які можуть відбутися при випробуваннях, записаних у таблиці 18.

Таблиця 18

№	Випробування	Випадкова подія	Вірогідна подія	Неможлива подія
1.	Підкидання грального кубика			
2.	Підкидання монети			
3.	Витягування кулі зі скриньки, де є чорні та білі кулі			
4.	Витягування двох гральних карт			
5.	Два постріли по мішені			

II. Сприймання і усвідомлення понять: повна група подій, попарно несумісні події, рівноможливі події, елементарні події.

! *Повною групою* подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

Наприклад: у випробуванні — кидання грального кубика повну групу подій становлять події:

A_1 — «поява числа 1»;
A_2 — «поява числа 2»;
A_3 — «поява числа 3»;
A_4 — «поява числа 4»;
A_5 — «поява числа 5»;
A_6 — «поява числа 6»,
або події:
B_1 — «поява парного числа»;
B_2 — «поява непарного числа».

Виконання вправ

Чи утворюють повну групу такі групи подій:

а) Випробування — кидання монети; події:
A_1 — «поява герба»;
A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:
A_1 — «поява двох гербів»;
A_2 — «поява двох цифр».

в) Випробування — два постріли по мішені; події:
A_1 — «жодного попадання»;
A_2 — «одне попадання»;
A_3 — «два попадання».

г) Випробування — два постріли по мішені; події:
A_1 — «хоча б одне попадання»;
A_2 — «хоча б один промах».

д) Випробування — витягування карти із колоди карт; події:
B_1 — «поява карти червоної масті»;
B_2 — «поява карти бубнової масті»;
B_3 — «поява карти трефової масті»;
B_4 — «поява карти пікової масті»;
B_5 — «поява короля»;
B_6 — «поява дами».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) так; д) так.

! *Попарно несумісні* події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Наприклад, попадання і промах при одному пострілі — це дві несумісні події; поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одному киданні грального кубика — це шість несумісних подій.

Виконання вправ

Чи є несумісними такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:
A_1 — «поява герба»;
A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:

B_1 — «поява герба на першій монеті»;

B_2 — «поява цифри на другій монеті».

в) Випробування — два постріли по мішені; події:

C_1 — «жодного попадання»;

C_2 — «одне попадання»;

C_3 — «два попадання».

г) Випробування — два постріли по мішені; події:

D_1 — «хоча б одне попадання»;

D_2 — «хоча б один промах».

д) Випробування — витягування двох карт з колоди; події:

E_1 — «поява двох чорних карт»;

E_2 — «поява туза»;

E_3 — «поява дами».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) ні.

! *Рівноможливі* події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, поява цифр 1, 2, 3,4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.

Виконання вправ

Чи є рівноможливими такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:

A_1 — «поява герба»;

A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання неправильної (зігнутої) монети; події:

B_1 — «поява герба»;

B_2 — «поява цифри».

в) Випробування — постріл по мішені; події:

C_1 — «попадання»;

C_2 — «промах».

г) Випробування — кидання двох монет; події:

D_1 — «поява двох гербів»;

D_2 — «поява двох цифр»;

D_3 — «поява одного герба і однієї цифри».

д) Випробування — витягування однієї карти із колоди; події:

E_1 — «поява карти червоної масті»;

E_2 — «поява карти бубнової масті»;

E_3 — «поява карти трефової масті»;

E_4 — «поява карти пікової масті».

є) Випробування — кидання грального кубика; події:

F_1 — «поява не менше трьох очок»;

F_2 — «поява не більше чотирьох очок».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) так; є) так.

! Якщо події:
1) утворюють повну групу подій;
2) є несумісними;
3) є рівноможливими, то такі події утворюють *простір елементарних подій.*

Виконання вправ

1. Чи утворюють простір елементарних подій такі події:

а) Випробування — кидання монети; події:
A_1 — «поява герба»;
A_2 — «поява цифри».

б) Випробування — кидання двох монет; події:
B_1 — «поява двох гербів»;
B_2 — «поява двох цифр».

в) Випробування — кидання грального кубика; події:
C_1 — «поява не більше двох очок»;
C_2 — «поява трьох і чотирьох очок»;
C_3 — «поява не менше п'яти очок».

г) Випробування — постріл по мішені; події:
D_1 — «попадання»;
D_2 — «промах».

д) Випробування — два постріли по мішені; події:
E_1 — «жодного попадання»;
E_2 — «одне попадання»;
E_3 — «два попадання».

є) Випробування — витягування двох карт із колоди; події:
F_1 — «поява двох червоних карт»;
F_2 — «поява двох чорних карт».

Відповіді: а) так; б) ні; в) так; г) так; д) ні; є) ні.

2. Завдання 2 із підручника (стор. 491).

III. Сприймання і усвідомлення класичного означення ймовірності.

Розглянемо випробування — кидання грального кубика; простір елементарних подій складається із подій:

A_1 — «поява числа 1»;
A_2 — «поява числа 2»;
A_3 — «поява числа 3»;
A_4 — «поява числа 4»;
A_5 — «поява числа 5»;
A6 — «поява числа 6».

Розглянемо подію A — «випало парне число». Події A сприяють елементарні події: A_2, A_4, A_6.

! Відношення числа подій, які сприяють події A, до загальної кількості подій простору елементарних подій називається *ймовірністю випадкової події A* і позначається P(A).

В наведеному прикладі $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$ де

A — подія,

P(A) — ймовірність події;

n — загальна кількість подій простору елементарних подій;

m — число подій, які сприяють події А.

Це класичне означення ймовірності було запроваджено засновниками теорії ймовірностей Б. Паскалем і П. Ферма. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1. Ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що при киданні двох монет випаде два герба.

Розв'язання

Нехай подія А — «випало два герба».

Простір елементарних подій складається з чотирьох подій:

A_1 — «випало два герба»; A_2 — «випали герб та число»; A_3 — «випали число та герб»; A_4 — «випали два числа».

Події А сприяє лише подія A_1.

Отже, $m = 1$, $n = 4$ і тоді

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

IV. Формування умінь знаходити ймовірність подій за класичним означенням.

Виконання вправ

1. В скриньці a білих і b чорних кульок. Із скриньки навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

Відповідь: $\frac{a}{a+b}$.

2. В скриньці a білих і b чорних кульок. Із скриньки виймають одну кульку і відкладають у сторону. Ця кулька — біла. Після того зі скриньки беруть ще одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька теж буде білою.

   Відповідь: $\frac{a-1}{a+b-1}$.

3. В скриньці a білих і b чорних кульок. Із скриньки вийняли одну кульку і, не дивлячись на неї, відклали в сторону. Після цього зі скриньки взяли ще одну кульку, вона була білою. Знайти ймовірність того, що перша кулька, відкладена в сторону,— теж біла.

   Відповідь: $\frac{a-1}{a+b-1}$.

4. Із скриньки, що містить a білих і b чорних кульок, вийнято одну за одною всі кульки, крім однієї. Яка ймовірність того, що останньою кулькою, що залишилася в скриньці, буде біла?

   Відповідь: $\frac{a}{a+b}$.

5. Із скриньки, в якій a білих і b чорних кульок, виймаються підряд всі кульки, які знаходяться в скриньці. Знайти ймовірність того, що другою буде вийнята біла кулька.

   Відповідь: $\frac{a}{a+b}$.

6. Гральний кубик кидається один раз. Знайти ймовірність таких подій:

А — «поява непарного числа очок»;

B — «поява не менше 5 очок»;

С — «поява не більше 5 очок».

Відповіді: $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(C)=\frac{5}{6}$.

7. Гральний кубик кидається двічі. Знайти ймовірність того, що обидва рази з'явиться однакова кількість очок.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

8. Кидаються одночасно два гральних кубика. Знайти ймовірність таких подій:

А — «сума очок, що випали, дорівнює 8»;

B — «добуток очок, що випали, дорівнює 8»;

С — «сума очок, що випали, більша ніж їх добуток».

Відповіді: $P(A)=\frac{5}{36}$; $P(B)=\frac{1}{18}$; $P(C)=\frac{11}{36}$.

9. Кидаються дві монети. Яка із подій більш ймовірніша:

А — «монети ляжуть однаковими сторонами»;

B — «монети ляжуть різними сторонами»?

Відповідь: $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$.

10. Кидають три монети. Яка ймовірність таких подій: А — «гербів більше, ніж цифр»; *B* — «випало рівно дві цифри»; С — «три монети випали однаковими сторонами»; *D* — «гербів не більше одного».

Відповіді: $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{3}{8}$; $P(C)=\frac{1}{4}$; $P(D)=\frac{1}{2}$.

V. Сприймання і усвідомлення матеріалу про використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій.

Безпосередній підрахунок ймовірностей подій значно спрощується, якщо використовувати формули комбінаторики. Правильність розв'язання задачі залежить від уміння визначити вид сполуки, що утворюються сукупністю подій, про які йдеться мова в умові задачі. Згадаємо алгоритм визначення виду сполуки (таблиця 15). Розглянемо приклади розв'язування задач.

Задача 1. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^{2}$). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 ($m = C_{12}^{2}$).

Отже, якщо подія А — «вийнято дві білі кульки», то

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{12}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2}{20\cdot 19}=\frac{33}{95}$$

Відповідь: $\frac{33}{95}$.

Задача 2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює $n = C_{20}^{3}$.

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^{2} способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^{2}\cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{12}^{2}\cdot 8}{C_{20}^{3}}=\frac{12\cdot 11\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{44}{95}$$

Відповідь: $\frac{44}{95}$.

Задача 3. В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із 15 + 9 + 6 = 30 кульок можна $n = C_{30}^{6}$ способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_{6}^{1} способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_{9}^{2} способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^{3} способами. Отже, події А сприяють $m = C_{6}^{1}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{15}^{3}$ елементарних подій. Тоді

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 9\cdot 8\cdot 6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}=\frac{24}{145}$$

Відповідь: $\frac{24}{145}$.

VI. Формування умінь обчислювати ймовірності випадкових подій, використовуючи формули комбінаторики та класичне означення ймовірності.

<u>Виконання вправ</u>

1. В урні знаходиться 12 кульок: п'ять білих і сім чорних. Навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вийнятих кульок:

   а) всі три чорні; б) дві чорні і одна біла;
   в) одна чорна і дві білі; г) всі три білі?

Відповіді: а) $\frac{C_{7}^{3}}{C_{12}^{3}}=\frac{7}{44}$; б) $\frac{5C_{7}^{2}}{C_{12}^{3}}=\frac{21}{44}$; в) $\frac{7C_{5}^{2}}{C_{12}^{3}}=\frac{7}{22}$; г) $\frac{C_{5}^{3}}{C_{12}^{2}}=\frac{1}{22}$.

2. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?

Відповідь: $\frac{1}{A_{10}^{2}}=\frac{1}{90}$.

3. При грі в «Спортлото» на спеціальній картці відмічається 6 номерів із 49. Під час тиражу визначаються 6 виграшних номерів. Яка ймовірність вгадати рівно 3 виграшних номера?

Відповідь: $\frac{C_{16}^{3}\cdot C_{43}^{3}}{C_{49}^{6}}=\frac{43\cdot 41\cdot 5}{47\cdot 23\cdot 11\cdot 7\cdot 3\cdot 2}\approx 0{,}0176$.

4. У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 6 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що всі вийдуть на різних поверхах, якщо кожний з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого.

Відповідь: $\frac{A_{8}^{6}}{8^{6}}$.

5. З 10 лотерейних білетів два виграшних. Знайдіть ймовірність того, що серед узятих будь-яких п'яти білетів: а) один виграшний; б) принаймні один виграшний?

Відповіді: а) $\frac{C_{2}^{1}\cdot C_{8}^{4}}{C_{10}^{5}}=\frac{5}{9}$; б) $1-\frac{C_{8}^{5}}{C_{10}^{5}}=\frac{7}{9}$.

6. 9 пасажирів сідають у 3 вагони. Знайдіть ймовірність того, що: а) у кожний вагон сяде по три пасажири; б) в один з вагонів сядуть 4, у другий — Зів третій — 2 пасажири.

Відповіді: а) $\frac{C_{9}^{3}\cdot C_{6}^{3}}{3^{9}}$; б) $\frac{C_{9}^{4}\cdot C_{5}^{3}\cdot 3!}{3^{9}}$.

7. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадають на різні місяці року.

Відповідь: $\frac{12!}{12^{12}}$.

8. Гральний кубик підкидають двічі. Знайдіть ймовірність того, що:
   а) у сумі випаде 6 очок;
   б) у сумі випаде 7 очок;
   в) за два кидки випаде однакова кількість очок;
   г) за два кидки випаде різна кількість очок.

Відповіді: а) $\frac{5}{6^{2}}$; б) $\frac{6}{6^{2}}=\frac{1}{6}$; в) $\frac{6}{6^{2}}=\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$.

9. У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайдіть ймовірність того, що: 4 найсильніших гравці потраплять по два в різні групи.

Відповідь: $\frac{C_{4}^{2}\cdot C_{16}^{8}}{C_{20}^{10}}=\frac{135}{323}$.

10. В урні *a* білих та *b* чорних кульок *(n ≥ 2)*. Із урни виймають навмання дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть білими.

Відповідь: $\dfrac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$.

11. В урні a білих та b чорних кульок ($a \geq 2$, $b > 3$). Із урни виймають навмання п'ять кульок. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть білими, а три чорними.

    Відповідь: $\dfrac{C_a^2 \cdot C_a^3}{C_{a+b}^5}$.

12. В урні, що містить k кульок, є l білих кульок. Із урни вибирається навмання r кульок. Знайти ймовірність того, що із них рівно s будуть білими.

    Відповідь: $\dfrac{C_l^s \cdot C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}$.

13. У класі k учнів. Знайдіть ймовірність того, що принаймні два з них народилися в одному місяці.

    Відповіді: $1 - \dfrac{A_{12}^k}{12^k}$, якщо $k \leq 12$;   1, якщо $k > 12$.