ЛЕКЦІЯ №1

<u>Тема заняття:</u> Елементи комбінаторики. Перестановки, розміщення, комбінації.

І. Вивчення нового матеріалу.

План лекції

1. Факторіал.
2. Комбінаторні задачі.
3. Перестановки. Розміщення. Комбінації.
4. Правило суми і добутку

Факторіал

Означення 1. *Факторіал — це добуток послідовних натуральних чисел.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Наприклад : $1! = 1$;

$2! = 1 \cdot 2 = 2$;

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$.

Приймають, що $0! = 1$.

Термін «факторіал» походить від англійського слова «фактор» — множник.

Вправи

1. Обчислити $\frac{102!}{100!}$.

Розв'язання

$$\frac{102!}{100!} = \frac{100! \cdot 101 \cdot 102}{100!} = 101 \cdot 102 = 10302.$$

2. Спростити: а) $\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!}$; б) $\frac{(n-2)!}{n!}$.

Розв'язання

а) $\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!(k+1)} + \frac{1}{k!} = \frac{1+k+1}{k!(k+1)} = \frac{k+2}{(k+1)!}$.

б) $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^2-n}$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{12x!}{(x-2)!}$.

Розв'язання

$$\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{12x!}{(x-2)!}$$

ОДЗ: $x \ge 4$, $x \in N$.

$$\frac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-4)!} = \frac{12(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!},$$

$$(x-3)(x-2)(x-1)x - 12(x-1)x = 0,$$

$$(x-1)x(x^2 - 5x - 6) = 0,$$

$$x - 1 \neq 0, x \neq 0; x^2 - 5x - 6 = 0;$$
$$x_1 = -1, x_2 = 6. \qquad x_1 \notin \text{ОДЗ}.$$

Відповідь. $x = 6$.

Комбінаторні задачі

На практиці часто доводиться відповідати на запитання: скількома способами можна виконати певне завдання? Наприклад, скласти розклад п'яти уроків на день із десяти різних навчальних предметів; позначити різні зв'язки між атомами і молекулами певної речовини; записати діагоналі опуклого десятикутника; знайти різні шляхи доставки виробів із заводу в магазини і визначити, який з них найбільш вигідний.

Методи розв'язування таких задач вивчають у розділі математики, який називається *комбінаторикою,* а самі задачі — *комбінаторними.*

Розв'язуючи комбінаторні задачі, розглядають скінченні множини, утворені з елементів будь-якої природи, та їх підмножини. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, у яких істотним є або порядок елементів, або їх склад, або і те і те одночасно. Такі скінченні множини (сполуки) мають певну назву.

Перестановки, розміщення, комбінації

Перестановки

Означення 2. *Будь-яка впорядкована множина, що складається з n елементів, називається перестановкою з n елементів.*

Перестановки відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Приклад 1. Із елементів множини $A = \{1, 2, 7\}$ можна утворити 6 перестановок: $\{1, 2, 7\}, \{1, 7, 2\}, \{2, 1, 7\}, \{2, 7, 1\}, \{7, 1, 2\}, \{7, 2, 1\}$.

Перестановки — впорядковані множини.

Кількість усіх можливих перестановок у множині з n елементів позначається P_n.

Обчислимо P_n.

Один елемент можна розмістити одним способом: $P_1 = 1$.

Два елементи можна розмістити двома способами: $P_2 = 2$.

Три елементи можна розмістити шістьма способами: $P_3 = 6$.

Розглянемо множину з чотирьох елементів $\{a, b, c, d\}$. Із елементів цієї множини можна утворити такі перестановки: з першим елементом a — 6 перестановок: $\{a, b, c, d)$, $\{a, b, d, c)$, $\{a, c, b, d\}$, $\{a, c, d, b)$, $\{a, d, c, b\}$, $\{a, d, b, c\}$;

з першим елементом b — 6 перестановок;

з першим елементом c — 6 перестановок;

з першим елементом d — 6 перестановок.

Усього 24 перестановки: $P_4 = 24$.

Взагалі, кількість усіх можливих перестановок у множині з n елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел, тобто

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n,$$
$$P_n = n!, \qquad (1)$$

де n — натуральне число.

Приклад 2. 12 осіб можна розмістити за столом, біля якого поставлено 12 стільців, P_{12}= 12! способами.

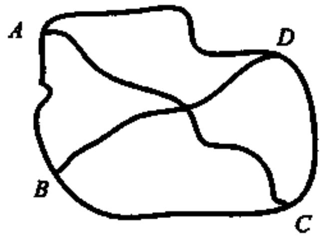
12! = 479 001 600. Якщо гості будуть пересаджуватися щохвилини протягом 11 год на добу 365 днів на рік з відпочинком 1 день у високосному році, то на це піде 1988 років і 140 днів.

Приклад 3. Скількома способами можна розставити на одній полиці 6 різних книг?
Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Задача 1. Мандрівнику потрібно виїхати з пункту *A,* відвідати пункти *B, C, й* і повернутися в пункт *A. AD* = 500 км, *CD* = 400 км, *BD* = 400 км, *AB* = 300 км, *AC* — 200 км, *BC* = 350 км. Скількома способами він може це зробити? Який варіант найбільш оптимальний?

Розв'язання

Розглянемо схему руху мандрівника.



Оскільки йому потрібно відвідати три пункти, то можливих варіантів маршруту є 6: P_3 = 3! = 6.

ABCDA = 1550 км, *ACDBA* = 1300 км, *ABDCA* = 1300 км, *ADBCA* = 1450 км, *ACBDA* = 1450 км, *ADCBA* = 1550 км.

Відповідь. Найбільш оптимальними є варіанти *ABDCA* і *ACDBA.*

<u>Розміщення</u>

Нехай *M* – множина, що містить *n* елементів.

Означення 3.

Розміщенням з n елементів по m називається довільна впорядкована підмножина з m елементів з множини M. Число розміщень з n елементів по m $(m \le n)$ *знаходиться за формулою*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (3)$$

Приклад 1 Студенти вивчають 10 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок, якщо в цей день повинно бути 3 різні дисципліни за розкладом?
Розв'язання. За формулою (1.1) одержимо:

$A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$.

Задача 2. Скількома способами можна скласти денний розклад з п'яти різних уроків, якщо в класі вивчають 10 навчальних предметів?

Комбінації

Означення 4. *Будь-яка підмножина з n елементів даної множини M, що містить m елементів, називається комбінацією з n елементів по m.*

Порядок елементів у множині неістотний, комбінації відрізняються лише складом елементів. Кількість усіх можливих комбінацій з m елементів по n позначається символом C_m^n.

Комбінація відрізняється від розміщення тим, що у цій підмножині *неістотним є порядок елементів.*

Задача 3. Скількома способами можна призначити чотирьох вартових із 30 солдатів?

Розв'язання

Будь-які дві групи відрізняються лише складом солдат, порядок у групі неістотний. Маємо справу з різними підмножинами з чотирьох елементів даної множини, що складається з 30 елементів. Будь-яка з цих підмножин є комбінацією з 30 елементів по 4. Якби ця підмножина була упорядкованою, то кількість таких груп можна знайти за формулою A_{30}^4. *У* кожній з упорядкованих множин можна виконати P_4 перестановок, тому кількість усіх можливих комбінацій $C_{30}^4 = \frac{A_{30}^4}{P_4}$.

У загальному випадку кількість комбінацій з n елементів по m елементів можна обчислити за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \qquad (5)$$

Отже, чотирьох вартових із 30 солдатів можна вибрати

$C_{30}^4 = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{26!\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{24\cdot 26!} = \frac{9\cdot 7\cdot 29\cdot 30}{1} = 27\,405$ способами.

Або за формулою 4: $C_{30}^4 = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4!} = 27\,405$.

Приклад. Скількома можливими способами можна вибрати з 15 людей делегацію в складі 3 осіб.

Розв'язання. Шукане число (кількість можливих вибірок) є числом сполучень із 15 по 3: $C_{15}^3 = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 1365$.

Приклад. Скільки є можливих способів для утворення дозору з трьох солдатів та одного офіцера, якщо є 80 солдат і 3 офіцери?

Розв'язання.

При одному офіцері і 80 солдатах можна утворити дозор C_{80}^3 способами. При трьох офіцерах число способів буде в три рази більше, а саме $3\cdot C_{80}^3 = 246480$.

Приклад. Знайти число діагоналей опуклого десятикутника.

Розв'язання.

Вершини десятикутника утворюють сукупність 10 точок площини, з яких довільні три не лежать на одній прямій. З'єднуючи будь-яку пару цих точок відрізками одержимо: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ відрізків, 10 з яких є сторонами многокутника. Отже, діагоналей 35.

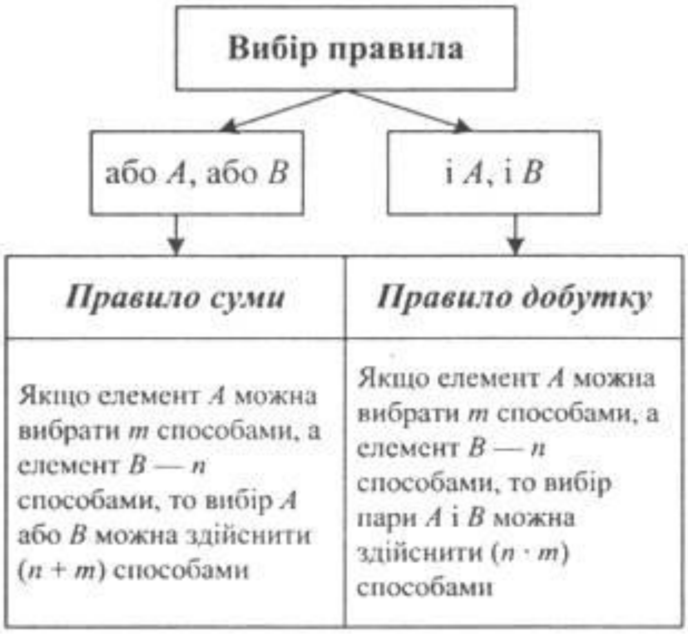
Основні правила комбінаторики

Задача

У групі 34 студенти, серед яких 16 хлопців і 18 дівчат.

1) Скількома способами можна вибрати одного студента цієї групи?
2) Скількома способами двох студентів — хлопчика й дівчинку?
3) Скількома способами можна вибрати дівчинку?
4) Уже вибрано одного студента. Скількома способами можна вибрати після цього хлопчика й дівчинку?

(На дошку вивішується (проектується) таблиця «Вибір правила».)



Розв'язання задачі

1) Хлопчика можна вибрати 16 способами, а дівчинку — 18 способами, тоді за правилом суми або дівчинку, або хлопчика можна вибрати
16+18=34 (способами).
2) За правилом добутку і дівчинку, і хлопчика можна вибрати
16·18=288 (способами).
3) Дівчинку можна вибрати 18 способами.
4) Якщо один учень уже вибраний, то можливі два варіанти:

а) якщо була обрана дівчинка, тоді дівчат залишилось 17, отже дівчинку можна вибрати 17 способами, а хлопчика — 16, а пару можна вибрати
17·16=272 (способами).

б) якщо був обраний хлопчик, то їх залишилось 15, отже існує 15 способів вибору хлопчика, для дівчинки — 18 способів, для пари —
15·18=270 (способів).

За правилом суми маємо

272+270=542 (варіанти).

Відповідь. 1) 34; 2) 288; 3) 18; 4) 542.

Розв'язування вправ

1. Скількома способами можна вибрати 1 фрукт, якщо на тарілці лежить 8 яблук і 6 груш?

(14.)

2. В їдальні є 4 перших і 6 других блюд. Скількома способами можна скласти обід?

(24.)

3. Скільки можна утворити двоцифрових чисел із цифр 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо цифри в запису числа не повторюються?

(90.)

4. Скільки можна утворити трицифрових чисел із цифр 1,2,3,4,5, якщо цифри в запису числа можуть повторюватись? Якою буде відповідь, якщо цифри не будуть повторюватись?

(5·5·5=125; 5·4·3=60.)

5. У продажу є 5 ручок, 4 олівці та 8 лінійок різних видів. Скількома способами учень може придбати набір з ручки, олівця та лінійки?

(160.)

III. Домашнє завдання.

Вивчити означення і формули, що розглядалися на занятті *(Шкіяь М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 11 класів серед, шк. — К.: Зодіак-Еко, 2002). (розділ XII § 3).

Розв'язати задачі

1. Скільки слід взяти елементів, щоб кількість усіх перестановок, які можна утворити з них, дорівнювала 5040?
2. Скільки різних прямих можна провести через 10 точок площини, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?
3. *Спростити вираз:* а) $\frac{10!}{7!}$; б) $\frac{(n-3)!}{n!}$; в) $\frac{(2n)!}{(2n+2)!}$.

Розв'язати рівняння: а) $C_x^{13} = C_x^7$;

4. Розв'язати задачі.

1. На будівництві працює 5 мулярів, 4 теслі та 2 штукатури. Скількома способами можна вибрати одного муляра? Одного теслю? Одного штукатура? Бригаду, в якій буде працювати по одному з робітників кожної професії?

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 2,4, 5, 8, 9, якщо цифри в запису числа не можуть повторюватися? Якщо будуть повторюватися?