Видавничий дім «Освіта»

Г. П. Бевз
В. Г. Бевз

Математика

Алгебра і початки аналізу та геометрія

Рівень стандарту

10 клас

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз

Математика

Алгебра і початки аналізу та геометрія

Рівень стандарту

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Видавничий дім «Освіта»
2018

УДК 512/514*кл10(075.3)
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Бевз Г. П.
Б36 Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с. : іл.

ISBN 978-617-656-896-4.

УДК 512/514*кл10(075.3)

ISBN 978-617-656-896-4

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Математика — значна частина загальнолюдської культури. Вона пронизує усі галузі людської діяльності і має неоціненне значення в техніці, економіці, біології, архітектурі, соціології тощо. За допомогою математичного моделювання можна порівняно легко і швидко вирішувати дуже важливі прикладні проблеми, які іншими методами розв'язувати надто дорого або неможливо. Ось що говорили про математику відомі люди:

«У вивчення природи математика робить найбільший внесок»

(Прокл,V ст.).

«Той, хто не знає математики... не може пізнати світ»

(Р. Бекон, XIII ст.).

«Люди, які засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше, ніж прості смертні»

(Ч. Дарвін, XIX ст.).

Той, хто знає математику, має не тільки на один «орган чуття» більше, ніж звичайна людина, а володіє більшим «ступенем свободи». З тривимірного простору йому зовсім не важко перейти в чотиривимірний чи в будь-який n-вимірний або в простір Банаха, Гільберта, Клейна тощо. А кожний із цих просторів — дивний своєрідний світ, багатший і корисніший від світів, вигаданих фантастами. Математика та її історія настільки багаті, що справжній філософ, історик, будь-який гуманітарій у них може знайти чимало цікавого й корисного.

У цьому підручнику пропонується інтегрований курс математики. До нього входять найважливіші теми з алгебри, початків аналізу та з геометрії. Окремі теми ви вже знаєте з попередніх класів, а більшість — зовсім нові. Намагайтеся опанувати їх. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним** шрифтом.

Знати математику — це насамперед уміти користуватися нею. А для цього слід розв'язувати багато задач. У підручнику є задачі та вправи різних видів і рівнів складності. Окремі задачі, що запропоновано у підручнику, — це задачі з реальними даними, які стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо. Для цих задач зроблено спеціальні позначення:

 — «Екологічна безпека й сталий розвиток»;

 — «Здоров'я і безпека»;

 — «Громадянська відповідальність»;

 — «Підприємливість та фінансова грамотність».

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання. Завдання групи А відповідають початковому і середньому рівню, а групи Б — достатньому і високому. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором.

Математика — чудовий, захоплюючий предмет, сповнений уяви і творчості. А ще вона — логічний тренінг розумової діяльності для фахівців з будь-якої галузі знань. Не випадково багато математиків добре виявили себе і в інших сферах. Наприклад, Піфагор, Р. Декарт, Б. Паскаль — філософи, О. Хайям — поет, П. Ферма — юрист, І. Кеплер — астроном, астролог і богослов, Г. Лейбніц — магістр філософії, доктор права, юрист, дипломат. Цей список можна продовжувати.

Якщо історик описує тільки війни і революції, діяльність царів, полководців і митців, його історія неповна, однобічна. Homo sapiens — людина мисляча. Тому історія людства передусім має містити описи діяльності кращих мислителів, зокрема й математиків.

Чи відоме вам найбільше відкриття XVII ст.? Воно стосується математики.

А чи може історик обминати найважливіші відкриття? Які найістотніші зміни відбулися в другій половині XX ст.? Створення швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ), а на їх основі — комп'ютерів нового покоління. Щоб правильно описати цю епоху, історик має сказати про створення ЕОМ і комп'ютерів, а для цього він повинен хоч трохи знати історію математики. Дехто з учнів говорить: «Мені не потрібна математика, бо я не збираюся бути математиком». Подібна аргументація анітрохи не краща такої: «Мені не потрібен автомобіль, бо я не збираюся бути шофером». Математика — це своєрідна мова, засіб спілкування. Чи ж може філолог ефективно досліджувати різні мови, не маючи уявлення про сучасну математичну мову та її історію?

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу запропоновано завдання рубрик «Скарбничка досягнень і набутих компетентностей», «Самостійна робота». Для розвитку творчості та креативності — завдання рубрик «Творчі завдання».

Математику можна порівняти з великим і барвистим квітником, у якому кожен може дібрати собі букет за смаком. Зрозуміло, щоб зробити це, спершу треба ввійти в цей квітник.

Ласкаво просимо!

Автори

Хочу бути юристом! Для чого мені математика?

Професія юриста по праву вважається однією з найдавніших і найшанованіших.

Професія юриста — це насамперед величезний рівень відповідальності. У руках фахівця іноді долі людей, підприємств і навіть держав.

Згадайте теорему Вієта, яку ви вивчали у 8-му класі. Її творець

Франсуа Вієт

(1540–1603)

Юрист за освітою. Працював адвокатом, а пізніше — радником парламенту і таємним радником королів Франції. Під час війни Франції з Іспанією всі таємні листи іспанців вільно читали французи. Завдяки своїм математичним здібностям Вієт успішно розгадував найскладніші шифри.

Юристом за освітою був видатний німецький учений

Готфрід Вільгельм Лейбніц

(1646–1716)

Він працював бібліотекарем, історіографом, організував Берлінську академію наук, досліджував проблеми політичної економії, мовознавства, хімії, геології, конструював обчислювальні машини.

Основоположник символічної логіки, один із творців математичного аналізу.

«Після Лейбніца, мабуть, уже не було людини, яка повністю охоплювала б усе інтелектуальне життя свого часу».

Н. Вінер

Окрім роботи в правоохоронних органах і судових інстанціях, юристи працюють у таких сферах, як:

- правова статистика;
- судова бухгалтерія;
- аналіз стану ринку на предмет недобросовісної конкуренції.

Юристи працюють також в інших галузях прикладної юридичної науки, де для вирішення юридичних питань вони використовують досягнення математичних та інших наук.

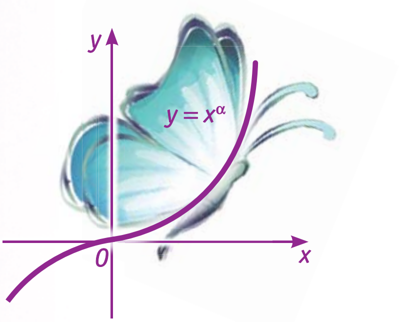
РОЗДІЛ 1.
ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

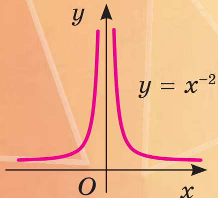
CHAPTER 1.
FUNCTIONS, THEIR PROPERTIES AND GRAPHS

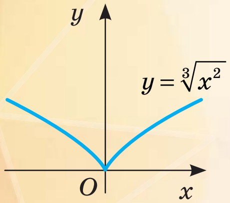
« Функції потрібні не лише натуралістові, без них тепер не обійдеться і соціологія. Взагалі нині немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення. »

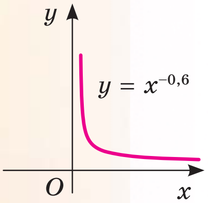
Ф. Лебединцев

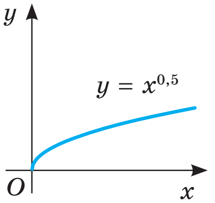
У цьому розділі розглянемо такі теми:











§ 1. Числові функції

Одне з найважливіших понять математики — функція. За її допомогою моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо нас, наприклад:

— тривалість поїздки автомобілем до пункту призначення (залежить від швидкості руху і відстані);

— вартість використаної електроенергії (залежить від ціни 1 кВт · год і обсягу споживання);

— зміна температури в кімнаті (залежить від об'єму кімнати і часу роботи кондиціонера тощо);

— час скачування файлу (залежить від розміру файлу та швидкості передачі даних). Поясніть, як саме.

Вивчення різноманітних явищ і процесів за допомогою функцій — один з основних методів сучасної науки. Саме тому функції використовують у різних галузях знань:

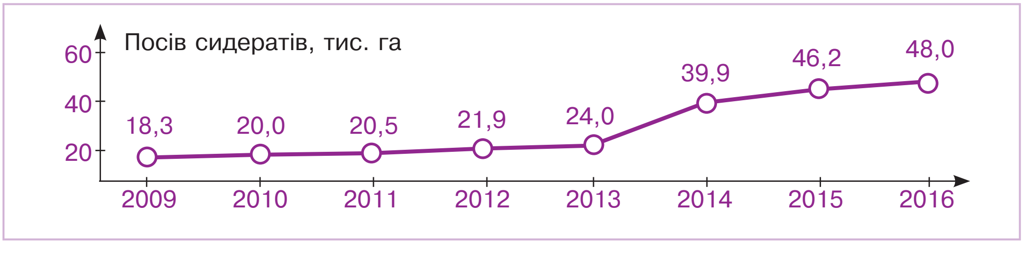
— у *медицині* — формула $t = 16 - \frac{a}{2}$ виражає відповідність добової тривалості сну, необхідного для нормального розвитку дитини, її віку a ($a < 18$);

— у *фізиці* — формула $R = R_0(1 + a \cdot (t - t_0))$ виражає залежність опору провідника від температури в градусах (тут R_0 — опір за початкової температури t_0; R — опір за довільної температури t; a — термічний коефіцієнт опору провідника);

— в *економіці* — формула $TR = P \cdot Q$ задає залежність загального доходу (TR), який отримує підприємство, від ціни P проданого товару і обсягу продажу Q;

— у *сільському господарстві* — подання та вивчення статистичних даних (графік функції надає можливість побачити та краще зрозуміти існуючі залежності).

Наприклад, за допомогою малюнка 1 можна простежити, як змінювалися площі посіву сидератів на Чернігівщині з 2009 по 2016 р., що забезпечило їй високу врожайність сільськогосподарських культур. Сидерати — зелені добрива — рослини, які використовують для збагачення ґрунту азотом та пригнічення росту бур'янів.



Мал. 1

Повторимо відомості про функцію, які ви знаєте з попередніх класів.

> Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають **функцією**.
>
> При цьому x називають **незалежною змінною**, або **аргументом**, y — **залежною змінною**, або **функцією**.

Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають *областю визначення* даної функції і позначають літерою D.

Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її *областю значень* і позначають літерою E. Якщо області визначення і області значень функцій є числовими множинами, то такі функції називають *числовими функціями*.

Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності.

Задавати функції можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад, відповідність між довжиною a сторони квадрата і його площею S можна задати формулою $S = a^2$.

Відповідність між радіусом r кола і довжиною C цього кола можна задати формулою $C = 2\pi r$.

Відповідність між значеннями змінної x і значеннями виразу $2x - 1$ можна задати формулою $y = 2x - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задають формулою і нічого не кажуть про область її визначення, то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ — множина всіх дійсних чисел, а функції $y=\dfrac{3}{x-1}$ — множина всіх дійсних чисел, крім 1, оскільки на 0 ділити не можна.

Якщо функцію задано формулою, то для будь-якого значення аргументу (з області визначення) можна вказати відповідне значення функції. Для цього у функцію замість змінної підставляють її значення. Для прикладу знайдемо значення функції $y=\dfrac{3}{x-1}$ для $x_1 = -5$ і $x_2 = 4$.

Якщо $x_1 = -5$, то $y=\dfrac{3}{-5-1}=\dfrac{3}{-6}=-0,5$.

Якщо $x_2 = 4$, то $y=\dfrac{3}{4-1}=\dfrac{3}{3}=1$.

Задавати функції можна і у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Тут:

- область визначення: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
- область значень: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

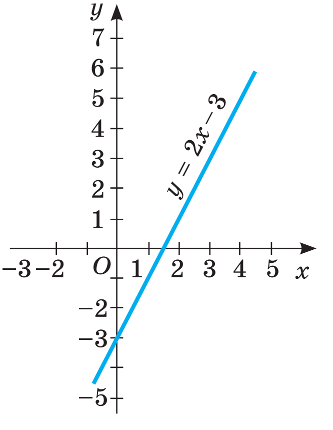
Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень — множина квадратів натуральних чисел і число нуль.

!

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Часто функції задають у вигляді графіків, побудованих у декартовій системі координат.

Наприклад, на малюнку 2 зображено графік функції $y = 2x - 3$, заданої на відрізку $[-1; 5]$, а на малюнку 3 — графік функції $y=\dfrac{6}{x}$ на відрізку $[1; 6]$.

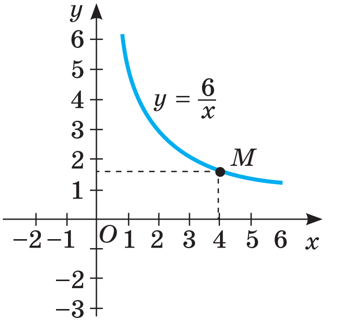


Мал. 2

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Для прикладу знайдемо значення функції $y=\dfrac{6}{x}$, якщо $x = 4$, користуючись побудованим графіком. Шукаємо на осі x точку з абсцисою 4, на графіку знаходимо точку M з абсцисою 4, а на осі ординат — ординату точки M; вона дорівнює 1,5. Отже, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень, тобто графік задає функцію.

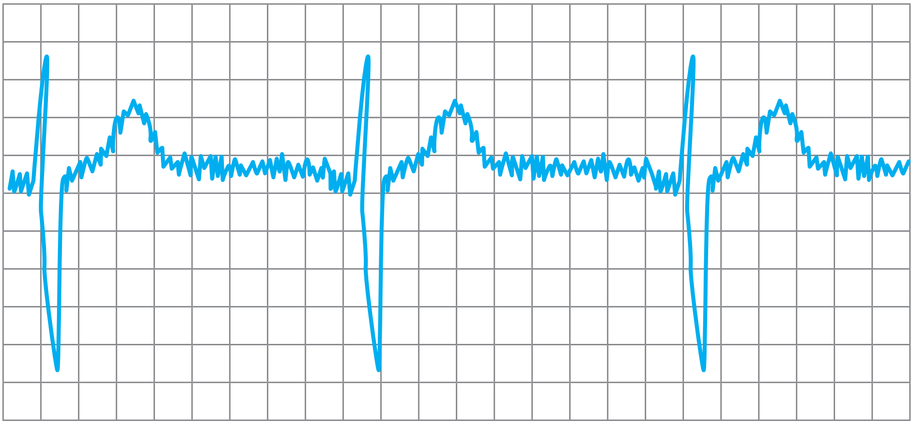
Графічний спосіб задання функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції, яку він задає. Зокрема, можна встановити такі її характеристики:

- область визначення функції;
- область значень функції;
- при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких — від'ємні, при яких дорівнюють нулю;
- на яких проміжках функція *зростає*, а на яких — *спадає*.



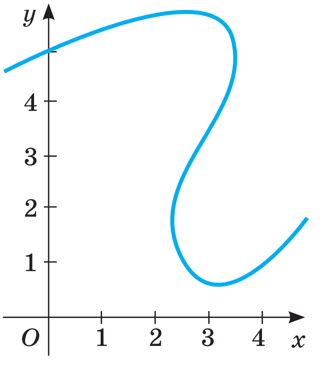
Мал. 3

Існують прилади — термографи, які самі креслять графік температури. Графіком функції є також кардіограма, накреслена кардіографом (мал. 4). «Читаючи» такий графік, лікар діагностує роботу серця хворого. Взагалі, багатьом фахівцям треба вміти «читати» різні графіки.



Мал. 4

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 5? Ні, оскільки на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 3$) відповідають три різних значення y.



Мал. 5

А згідно з означенням функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x відповідає єдине значення функції y.

Існує багато різних видів функцій.

Деякі з них ви вже знаєте:

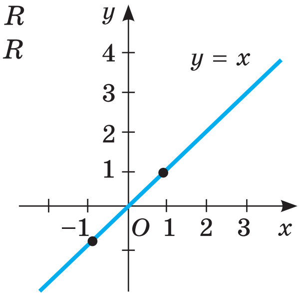
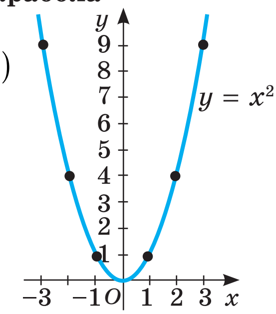
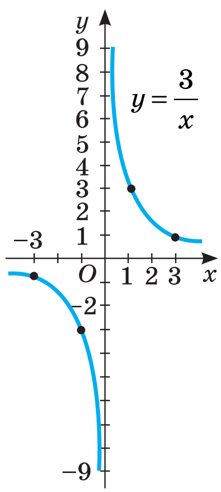
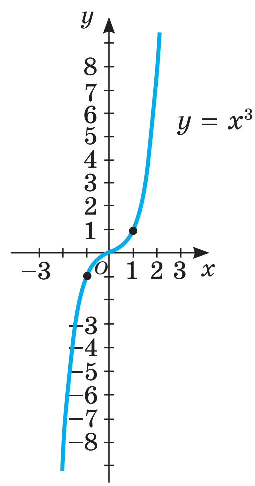
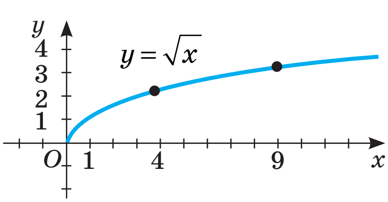
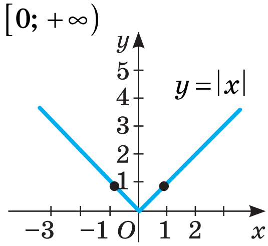
- $y = kx$ — пряма пропорційність $(k \neq 0)$;
- $y = kx + b$ — лінійна функція;
- $y = \frac{k}{x}$ — обернена пропорційність $(k \neq 0)$;
- $y = ax^2 + bx + c$ — квадратична (або квадратна) функція $(a \neq 0)$.

Графіки найуживаніших функцій подано в таблиці 1.

Щоб будувати графіки складніших функцій, використовують такі правила.

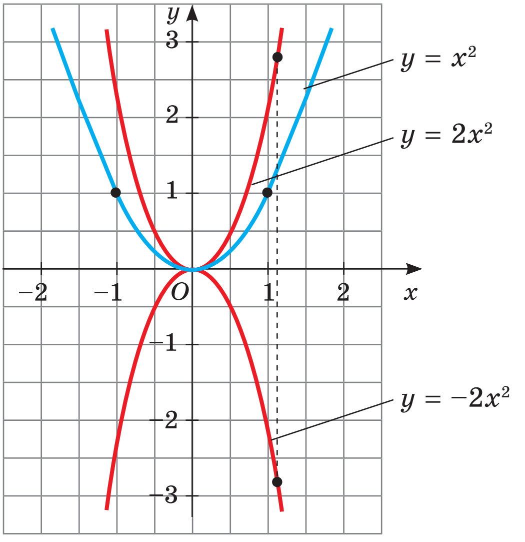
- Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.
- Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

Таблиця 1

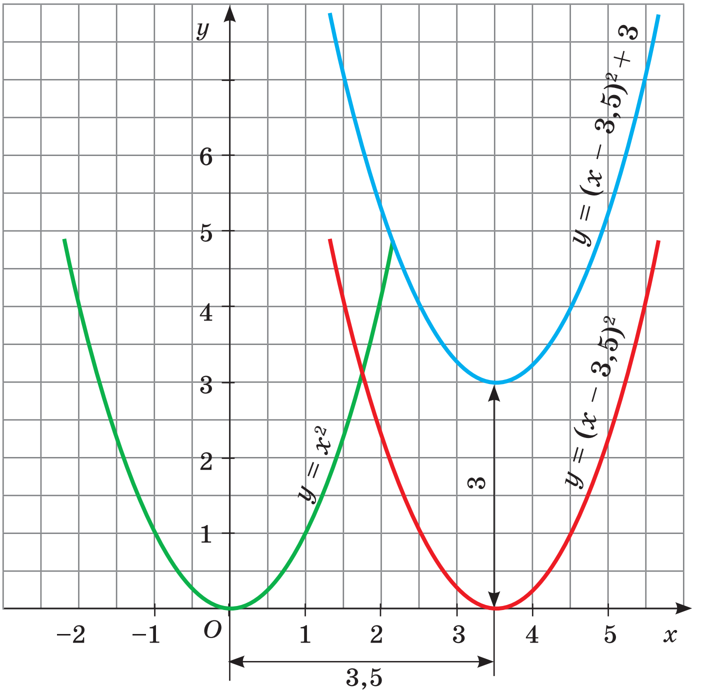
Графік — **пряма** $D(y) = R$ $E(y) = R$  	Графік — **парабола** $D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$ 
Графік — **гіпербола** $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  	Графік — кубічна **парабола** $E(y) = R$ $D(y) = R$ 
$D(y) = [0; +\infty)$ $E(y) = [0; +\infty)$  	$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$ 

- Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі y в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, або стиснути його в k разів, якщо $k > 1$.
- Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямі осі y, якщо $n > 0$, або на $|n|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $n < 0$.
- Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямі осі x, якщо $m > 0$, або на $|m|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $m < 0$.

Приклади побудови графіків $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ подано на малюнку 6, а графіків $y = x^2$, $y = (x - 3,5)^2$, $y = (x - 3,5)^2 + 3$ — на малюнку 7.



Мал. 6



Мал. 7

Перевірте себе

1. Що називають функцією? Як позначають функції?
2. Що називають аргументом функції, областю визначення функції?
3. Як можна задавати функцію?
4. Які функції називають числовими?
5. Назвіть основні види функцій. Які їх графіки?
6. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = af(x)$; б) $y = f(x) + b$; в) $y = f(x + a)$?

Виконаємо разом

1) Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$; б) $y=\sqrt{1-2x+x^2}$.

Розв'язання. а) Проаналізуємо функцію $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$.

Змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дробу $\dfrac{x+3}{9-x^2}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння $9 - x^2 = 0$, $(3 - x)(3 + x) = 0$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Отже, область визначення функції — множина дійсних чисел, крім $x = \pm 3$, тобто:

$D(y)=(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$.

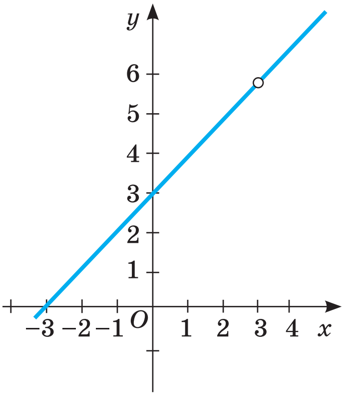
б) Розглянемо функцію $y=\sqrt{1-2x+x^2}$. Виконаємо тотожні перетворення: $y=\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(1-x)^2}$, отже, $y=\sqrt{(1-x)^2}$. При будь-яких значеннях змінної x вираз $(1 - x)^2 \geq 0$, а тому область визначення функції — уся множина дійсних чисел:

$D(y) = R$.

2) Чим різняться графіки функцій $y = x + 3$ і $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$?

Розв'язання. Праві частини даних рівностей тотожно рівні, оскільки $\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$.

Але перший вираз має числові значення при всіх дійсних значеннях x, а другий — при всіх, крім $x = 3$. Тому графік першої функції — пряма, а другої — пряма без однієї точки (мал. 8).



Мал. 8

Виконайте усно

1. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 2{,}5$; г) $y = 4 - x$.

2. Як називають графік функції, заданої формулою:
а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = x^{-1}$?

3. Графік якої з функцій проходить через початок координат:
а) $y = -5x$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x(x - 2)$?

4. Які з функцій, заданих формулами $y = 15 - x$, $y = |x|$, $y = 3(x - 2)$, $y = x^2 + 5$, не можуть мати від'ємних значень?

5. Чи є площа круга функцією його радіуса? А його діаметра?

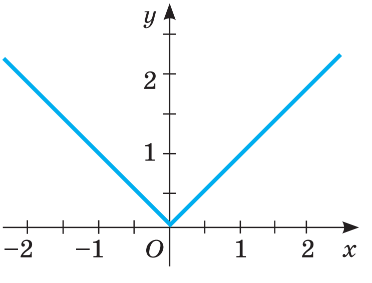
6. Чи є об'єм куба функцією довжини його ребра? Спробуйте задати цю функцію формулою.

А

7. Задайте формулою функцію, яка виражає площу квадрата через його периметр P.

8. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність периметра правильного трикутника від довжини його сторони.

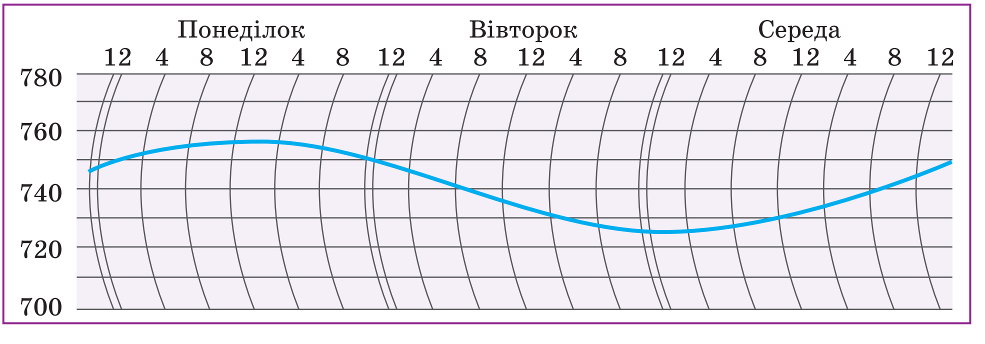
9. На малюнку 9 зображено графік функції. Один учень стверджує, що цю функцію можна задати формулою $y = \sqrt{x^2}$, інший — що графіку відповідає формула $y = |x|$. Хто з них правий? Побудуйте графік функції $y = -|x|$.



Мал. 9

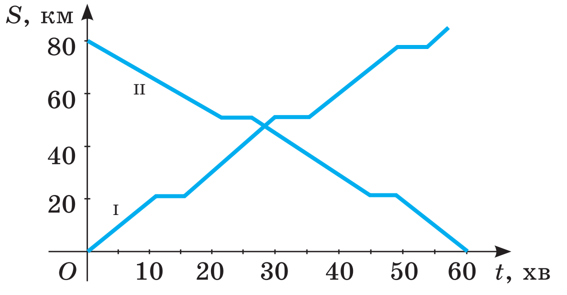
10. У США основною одиницею довжини вважається ярд, який дорівнює $\dfrac{3600}{3937}$ м. Задайте формулою залежність довжини L, вираженої в метрах, від числа ярдів l.

11. «Прочитайте» графік зміни атмосферного тиску, зображений на малюнку 10.



Мал. 10

12. На малюнку 11 зображено графіки руху двох електропоїздів. Проаналізуйте ці рухи: скільки зупинок робив кожен поїзд; коли вони зустрілися; скільки часу тривала кожна зупинка?



Мал. 11

13. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо функцію задано формулою:
а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = 2x^2 + 3$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

14. Функцію задано формулою $y = -0{,}5x + 2$. Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -24; -10; 0; 5. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -6; 0; 5; $7{,}5$?

15. Знайдіть значення функції, заданої формулою:
а) $y = 8x - 5$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2; 0; $1{,}5$; 12; 25;
б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -8; -1; 0; 1; 20.

16. Функцію задано формулою $y = 0{,}25x - 1$. Заповніть таблицю.

x	-10	-5							
y			-2	-1	0	1	$1{,}5$	4	25

17. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x + 5}$ на області визначення $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$. Задайте її таблично і графічно.

18. Функцію задано таблицею.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задайте її формулою. Укажіть її область визначення й область значень.

19. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x$ перетинає:
а) вісь y; б) вісь x?

20. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 2x - 7$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$; ґ) $y = \frac{x+3}{x^2 - 9}$;

б) $y = \sqrt{x + 1}$; г) $y = \frac{1}{x - 1}$; д) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

21. Функцію $y = x^2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область значень.

22. У таблиці подано обсяг споживання електроенергії (у кВт · год) родиною Рахувальників у першому півріччі 2012 і 2017 років. Складіть таблицю про споживання електроенергії за минулий рік у вашій родині. Побудуйте в одній системі координат:

а) графік споживання електроенергії за перше півріччя минулого року у вашій родині;

б) графік споживання електроенергії за перше півріччя 2017 року в родині Рахувальників. Зробіть висновки.

Місяць / Рік	1	2	3	4	5	6
2012	150	130	145	120	125	110
2017	105	100	90	90	95	70

Б

Побудуйте графік функції **(23, 24)**.

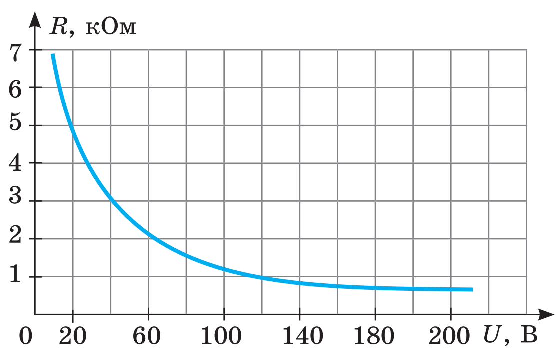
23. а) $y = -4x$; б) $y = 4x^2$; в) $y = x + 4$.

24. а) $y = 0,5x$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = (1 - x)(1 + x)$.

25. Маса порожньої бочки — 40 кг, а маса 1 л бензину — 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

26. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см, b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3. Виразіть формулою залежність b від a.

27. Під дією електричного струму в тілі людини виникають достатньо складні біохімічні і фізіологічні процеси, які знижують опір її тіла. Залежність опору тіла людини від *напруги електричної мережі* наведено на малюнку 12. Використовуючи графік, встановіть:



Мал. 12

а) чому дорівнює опір тіла людини, якщо напруга дорівнює 20 В;

б) починаючи з якої напруги опір тіла людини не перевищує 1 кОм;

в) зростаючою чи спадною є задана функція;

г) дізнайтеся більше про чинники, що впливають на зміну опору тіла людини.

28. Ательє виготовляє та продає вишиванки, вартість кожної з яких 750 грн. Щоб пошити одну таку сорочку, потрібно 2,4 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 50 м тканини. Яких значень може набувати x? Скільки тканини залишиться в сувої, якщо пошиють 15 сорочок? Який дохід матиме ательє від продажу цих 15 сорочок? Який дохід матиме ательє, якщо продасть усі сорочки, виготовлені з одного сувою?

29. Знайдіть значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y = -3x + 2$ дорівнює -7; 0; 5;

б) значення функції $y = \dfrac{4}{x-3}$ дорівнює -20; 2; $\dfrac{1}{2}$;

в) значення функції $y = x(x - 3)$ дорівнює -2; 0; 10;

г) значення функції $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-4}$ дорівнює $-\dfrac{5}{8}$; 0; 1,4.

30. Задайте формулою функцію, якщо:

а) значення функції на 4 більші від значень аргументу;
б) значення функції на 9 менші від значень аргументу;
в) значення функції втричі більші від значень аргументу;
г) значення функції протилежні значенням аргументу;
ґ) значення функції обернені до значень аргументу.

31. Функцію задано формулою $y = \dfrac{4}{1-x}$, де $-7 \le x < 1$. Заповніть таблицю.

x	-7	-3	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$
y							

Побудуйте графік цієї функції.

32. Функцію задано формулою $y = \dfrac{6}{x} + 3$, де $1 \le x < 6$. Побудуйте графік цієї функції, склавши спочатку таблицю її значень.

33. Відомо, що графік лінійної функції проходить через точки $A(-2; 1)$ і $B(3; 6)$. Задайте цю функцію формулою.

34. Задайте формулою обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(3; 4)$.

35. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(0; 5)$? А через точку $B(5; 6)$?

36. Побудуйте графік функції: а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 + 6x + 9$.

37. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = x - 1$ і $y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$; б) $y = 3 - x$ і $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{3-x}$.

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій **(38–40)**.

38. а) $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = -x^3 + 1$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x} - 1$.

39. а) $y = -3x$, $y = -3x + 2$, $y = -3x - 0{,}5$;

б) $y = -\dfrac{12}{x}$, $y = -\dfrac{12}{x} + 3$, $y = -\dfrac{12}{x} - 1$.

40. а) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = 2\sqrt{x} + 2$;

б) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$, $y_3 = -(x - 3)^2$.

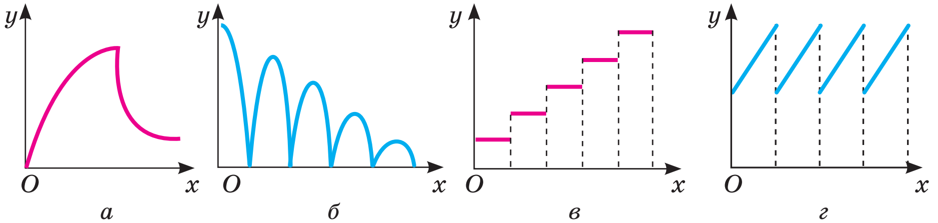
41. Установіть, який із графіків (мал. 13) відповідає кожній з описаних нижче ситуацій:

а) на газоні росте трава, яку регулярно скошують (x — час, y — висота трави);

б) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);

в) м’яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — відстань від м’яча до підлоги);

г) через кожну годину робочого часу на склад здають однакову кількість виготовлених деталей (x — час, y — кількість деталей на складі).



Мал. 13

42. Розв’яжіть графічно рівняння:

а) $2x - 6 = \sqrt{x}$; б) $x^2 = x + 2$; в) $x = x^3$; г) $\dfrac{3}{x} = 3x$.

43*. Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1 °С. На глибині 5 м вона дорівнює 15 °С. Задайте залежність температури t від глибини h. Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

44. **Практичне завдання.** Складіть завдання, аналогічне завданню 41 і запропонуйте його для розв’язання однокласникам.

Вправи для повторення

45. Розв’яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 6 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

46. З двох розчинів солі — 10-відсоткового і 15-відсоткового — треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

47. Спростіть вираз, якщо a, b, c — додатні числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0{,}25a^2b^6c^{10}}$; в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2{,}25a^2b^2c^8}$.

§ 2. Властивості функції

Щоб вивчати процеси і явища навколишнього світу, потрібно вміти досліджувати відповідні математичні моделі, зокрема і функції. *Дослідити функцію* — це означає виявити її найважливіші властивості:

- вказати область визначення;
- вказати область значень;
- з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною;
- знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
- знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
- визначити проміжки зростання чи спадання.

Узагальнивши все, слід побудувати графік функції.

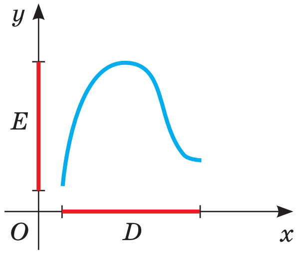
Область визначення і область значень. Установлюючи область визначення функції, вказують усі значення, яких може набувати аргумент. Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 14). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел R, область її значень — проміжок $[0; +\infty)$.

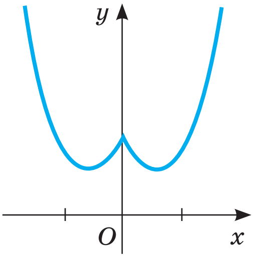
Парність. Функцію $y = f(x)$ називають **парною,** якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$. Функцію $y = f(x)$ називають **непарною,** якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, у яких або область визначення не симетрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$. Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки:

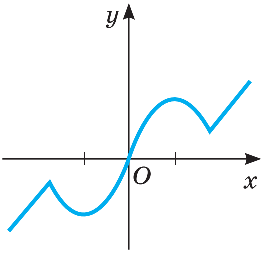
- графік парної функції симетричний відносно осі y (мал. 15);
- графік непарної функції симетричний відносно початку координат (мал. 16).



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

Наприклад, з функцій, заданих на R, $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = |x| - 3$ — парні, $y = x^3$, $y = x^3 + x$ — непарні, а $y = 2x + 3$, $y = x^2 + x$ — ні парні, ні непарні. Побудуйте їхні графіки і переконайтеся в цьому.

!

Нулі функції та проміжки знакосталості. Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають **нулями функції**. Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають **проміжками знакосталості**.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Щоб знайти проміжки знакосталості, потрібно розв'язати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$. Розв'язки нерівності $f(x) > 0$ — це значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

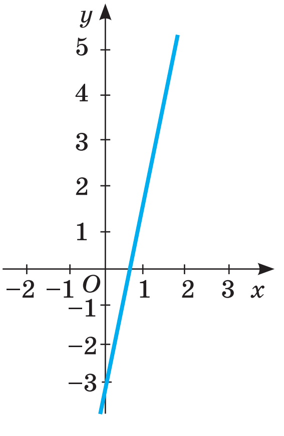
Наприклад, нулями функції $y = x^2 - 9$ є числа 3 і –3, оскільки $f(3) = 0$ і $f(-3) = 0$.

Функція набуває від'ємних значень, якщо $x^2 - 9 < 0$, тобто коли $x \in (-3; 3)$.

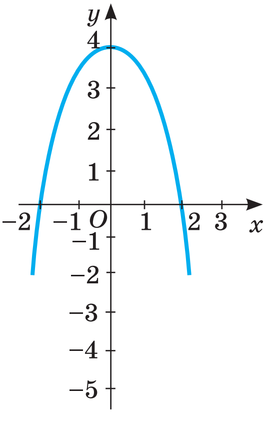
!

Монотонність. Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції. Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

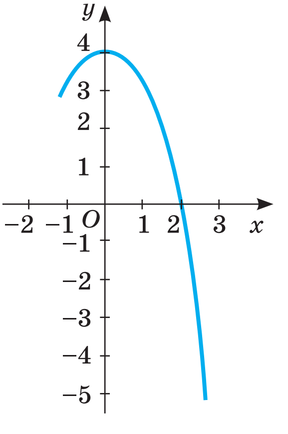
Якщо функція на всій області визначення зростає або на всій області визначення спадає, її називають *монотонною*. Якщо ж функція зростає на деякому проміжку або спадає на ньому, то говорять, що вона монотонна на даному проміжку. Наприклад, монотонною є функція $y = 5x - 3$, вона на всій області визначення зростає (мал. 17). Функція $y = 4 - x^2$ монотонна на проміжку $(-\infty; 0)$, на якому зростає, і на проміжку $(0; +\infty)$, на якому спадає. На всій області визначення вона не монотонна (мал. 18).



Мал. 17



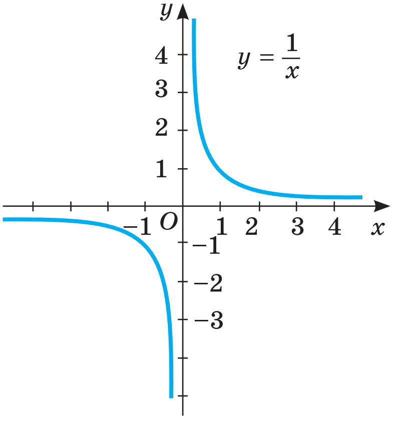
Мал. 18



Мал. 19

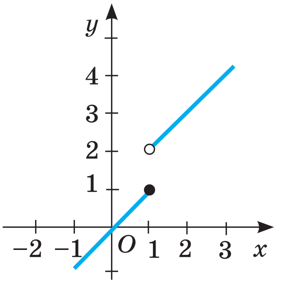
Характеризуючи властивості функції, часто зазначають також, у яких точках вона має *найбільше значення*, у яких — *найменше*. Наприклад, функція $y = 4 - x^2$, задана на проміжку $[-1; 3]$, у точці $x = 0$ має найбільше значення 4, а в точці $x = 3$ — найменше значення, яке дорівнює -5 (мал. 19).

Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$ складається з двох роз'єднаних віток (мал. 20). При $x = 0$ значення цієї функції не існує. Кажуть, що в точці $x = 0$ вона має *розрив*. Якщо графіком функції є неперервна лінія (її можна провести, не відриваючи олівець від паперу), то таку функцію називають *неперервною функцією*. Приклади неперервних функцій подано на малюнках 17–19. А на малюнках 21 і 22 зображено графіки функцій, які мають розрив у точці $x = 1$. Вони не є неперервними в цій точці.



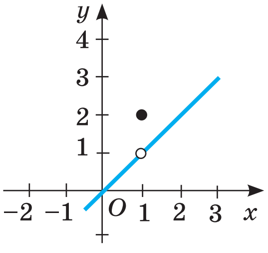
Мал. 20

Деякі з властивостей функції досить просто з'ясовувати, дивлячись на її графік. Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 23, має такі властивості.

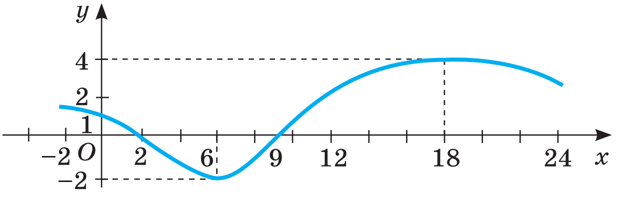


Мал. 21

- Область визначення $D(y) = [-2; 24]$.
- Область значень $E(y) = [-2; 4]$.
- Парність. Функція ні парна, ні непарна.
- Точки перетину графіка функції з віссю y. Одна точка — $(0; 1)$.
- Нулі функції та проміжки знакосталості. Функція має два нулі: $x_1 = 2$ і $x_2 = 9$. $f(x) > 0$, якщо $x \in (-2; 2) \cup (9; 24)$, а $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; 9)$.
- Монотонність. Функція спадає на двох проміжках $x \in (-2; 6)$ і $x \in (18; 24)$; зростає функція на одному проміжку $x \in (6; 18)$.
- Функція неперервна. Має найбільше значення $y = 4$, якщо $x = 18$, і найменше значення $y = -2$, якщо $x = 6$.



Мал. 22



Мал. 23

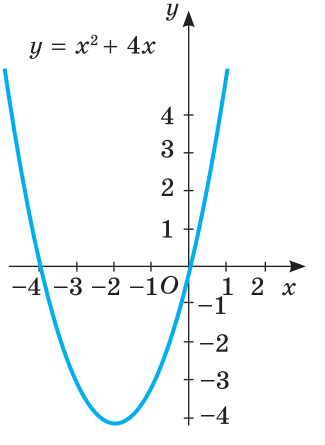
Перевірте себе

1. Що називають областю визначення і областю значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають нулями функції?
3. Які функції називають зростаючими? А спадними?
4. Чи може функція на одному проміжку спадати, а на іншому — зростати?
5. Які функції називають парними? Наведіть приклади парних функцій.
6. Які функції називають непарними? Наведіть приклади непарних функцій.
7. Чи правильно, що кожна функція є парною або непарною?
8. Чи існують функції, які одночасно є і парними, і непарними?

Виконаємо разом

1) Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x$ і визначте, на якій множині значень аргументу дана функція спадає, а на якій — зростає. При якому значенні x значення даної функції найменше?

Розв'язання. Дана функція квадратична, її графік — парабола. Формулу $y = x^2 + 4x$ можна подати в іншому вигляді: $y = x(x + 4)$. З останньої формули видно, що значення функції дорівнюють нулю при $x = 0$ і $x = -4$. У точках із такими координатами графік даної функції перетинає вісь x. Вісь параболи проходить через точку з абсцисою $x = -2$. При такому значенні аргументу $y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. За знайденими координатами трьох точок будуємо параболу (мал. 24). Як видно з графіка, дана функція спадає на проміжку $(-\infty; -2)$, зростає на проміжку $(-2; +\infty)$, а найменше значення має при $x = -2$; воно дорівнює -4.



Мал. 24

2) Парною чи непарною є функція:

а) $y = x^2 - 9$; б) $y = \dfrac{2}{x}$; в) $y = 5x + 1$?

Розв'язання. а) $y = x^2 - 9$. Область визначення $D(y)$ функції $y = x^2 - 9$ (множина всіх дійсних чисел R) є симетричною відносно 0 і $f(-x) = (-x)^2 - 9 = x^2 - 9 = f(x)$. Отже, $y = x^2 - 9$ — функція парна.

б) $y = \dfrac{2}{x}$. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симетрична відносно 0 і $f(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x} = -f(x)$.

Отже, $y = \dfrac{2}{x}$ — функція непарна.

в) $y = 5x + 1$. $D(y) = R$ — симетрична відносно 0.

$f(-x) = 5(-x) + 1 = -5x + 1 = -(5x - 1) \neq \pm f(x)$.

Отже, функція $y = 5x + 1$ — ні парна, ні непарна.

Відповідь: а) Парна; б) непарна; в) ні парна, ні непарна.

Виконайте усно

48. Які з функцій визначені на всій числовій осі:
а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2 + 10$; в) $y = x^{-1} + 1$?

49. Функція $y = f(x)$ має найменше значення, що дорівнює 4. Яке найменше значення має функція:
а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x) - 7$?

50. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція:
а) $y = f(x) - 15$; б) $y = f(x) + 7$?

51. Використовуючи таблицю 1 (с. 11), встановіть, які з функцій зростаючі, а які — спадні:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x + 3$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = -x$.

52. Розгляньте малюнки 17, 18 і встановіть, на яких проміжках зростає і на яких спадає функція:
а) $y = x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = 1 + x^2$; г) $y = (x + 3)^2$.

53. Наведіть приклади функцій: а) парних; б) непарних.

А

54. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x + 3$ і визначте, на якій множині значень аргументу дана функція набуває додатних значень, а на якій — від'ємних. При якому значенні x значення даної функції дорівнює нулю?

55. Побудуйте графіки функцій $y = 0{,}1x - 2$ і $y = 1 - 2x$. Яка з цих функцій зростаюча, а яка — спадна? Запишіть для кожної з них область визначення і область значень.

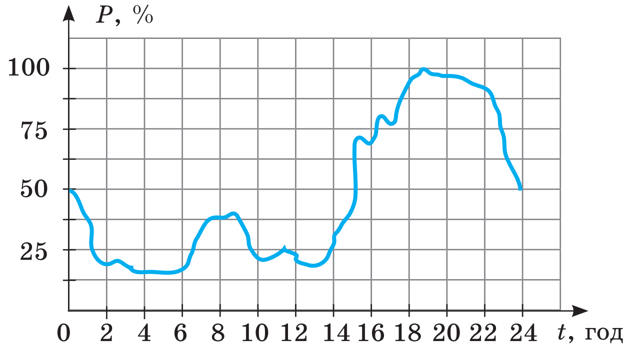
56. Побудуйте графік функції $y = x + 3$. Знайдіть область значень функції $y = x + 3$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7)$; в) $[0; +\infty)$.

57. Доведіть, що дана функція парна:
а) $y = x^2 + 3$; б) $y = 4 : x^2$; в) $y = x^2 + 1$; г) $y = 2 + x^4$.

58. Доведіть, що дана функція непарна:
а) $y = -x^3$; б) $y = x + x^3$; в) $y = 5x$; г) $x = x^5$.

59. Покажіть, що дана функція ні парна, ні непарна:
а) $y = 3x + 1$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2 + 3x$; г) $y = (x - 3)^2$.

60. На малюнку 25 подано графік електричного навантаження в житловому будинку за одну добу взимку (залежність електроспоживання від часу доби). Встановіть: а) проміжки спадання і зростання заданої функції; б) протягом якого часу мешканці будинку споживають найбільшу кількість електроенергії; в) у які години електричне навантаження в житловому будинку не перевищує 25 %. Дізнайтеся, що таке двотарифний лічильник, як він функціонує і за яких умов його доцільно використовувати для житлових будинків.



Мал. 25

61. Скільки нулів має функція:
а) $y = x + 3$; б) $y = 6x$; в) $y = x^2 - 1$; г) $y = x^2 - 7x$?

62. Знайдіть нулі функції:
а) $y = 12x - 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x} - 5$; г) $y = x^2 - 4x$.

63. Запишіть проміжки знакосталості функції:
а) $y = x + 3$; б) $y = x^2 - 25$; в) $y = 3x$; г) $y = -x^2 + 9$.

64. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:
а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = x$?

65. На наслідки ураження людини електричним струмом впливає вид і частота струму, що проходить через тіло людини. На малюнку 26 зображено залежність ураження людини змінним струмом від його частоти.

Мал. 26

Використовуючи графік, встановіть:
а) зростаючою чи спадною є задана функція?
б) за якої частоти небезпека ураження не перевищує 50 %?
в) яка частота змінного струму є найбільш небезпечною?

66. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:
а) $y = 5x - 1$; б) $y = -2x$; в) $y = 0,5x^2$; г) $y = x^3 - 1$; ґ) $y = -3$.

67. Побудуйте графік функції:
а) $y = -x^2 + 1$; б) $y = 3$; в) $y = 5x$; г) $y = 5x - 1$; ґ) $y=\sqrt{x}$; д) $y=\dfrac{3}{x}$.
Укажіть, яка з функцій є парною, яка — непарною.

Б

Знайдіть область визначення функції, заданої формулою **(68–70)**.

68. а) $y = x(x - 5)$; б) $y = x^2 + 6x + 8$; в) $y = -2,5x - 0,5$; г) $y=\dfrac{16-x^2}{x+5}$; ґ) $y=\dfrac{x^2+9}{3x-1}$; д) $y=\dfrac{2}{x}+1$.

69. а) $y=\dfrac{x+7}{x^2-36}$; б) $y=\dfrac{2x}{1-25x^2}$; в) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$; г) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}$; ґ) $y=\dfrac{3}{x(x+1)}$; д) $y=\sqrt{x(4+x)}$.

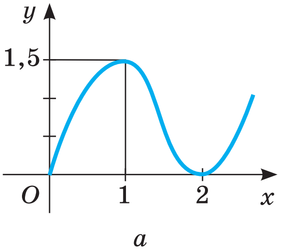
70. а) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-2}$; в) $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$; г) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; ґ) $y=2\sqrt{5+x^2}$; д) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$.

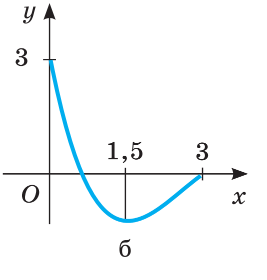
71. Знайдіть нулі функції y та інтервали її знакосталості, якщо:
а) $y = x^2 + 10x - 11$; б) $y = x^2 + 18x + 81$; в) $y = 6x^2 - 5x - 1$; г) $y = 2x^2 + 3x - 9$; ґ) $y = -2x^2 + 7x - 3$; д) $y = 5 - 2x - 7x^2$; е) $y = 6x^2 - x$; є) $y = -2x(x + 3)$.

72. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:
а) $y = x^2 - 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 7$; в) $y = 4x^2 - 12x - 3$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

73. Знайдіть найбільше значення функції:
а) $y = 3 - (x - 2)^2$; б) $y = -0,25(x + 5)^2$; в) $y = 6x - x^2 - 10$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

74. Зобразіть графіки (мал. 27) у зошиті. Кожний із графіків добудуйте так, щоб одержана функція була парною. Для побудованих графіків установіть: а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.





Мал. 27

75. Зобразіть графіки (мал. 27) у зошиті. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція була непарною. Для побудованих графіків установіть: а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.

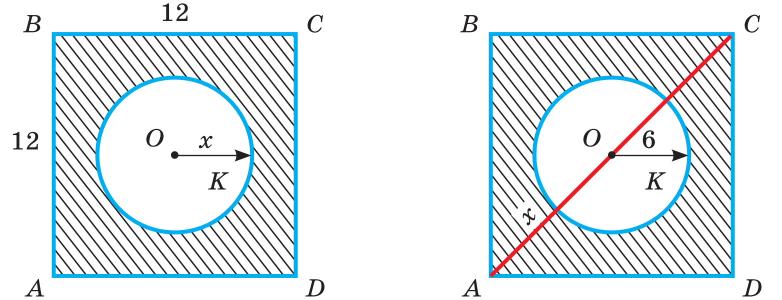
76. Не будуючи графіка функції y, встановіть, при яких значеннях x вона набуває додатних значень.

а) $y = 2x + 5$; в) $y = -x + 4$; ґ) $y = x^2 - 4$; е) $y = 4x^2 - 1$;
б) $y = 0{,}5x - 3$; г) $y = -3x - 2$; д) $y = \sqrt{x} - 5$; є) $y = x^2 - 7x$.

77. Побудуйте графік функції та встановіть, при яких значеннях x вона зростає або спадає.

а) $y = 5x$; в) $y = (x + 1)(1 - x)$; ґ) $y = x^2 - 3$; е) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = -x^2 + 4$; г) $y = x^3 + 2$; д) $y = 4 : x^2$; є) $y = x^2 + 3x$.

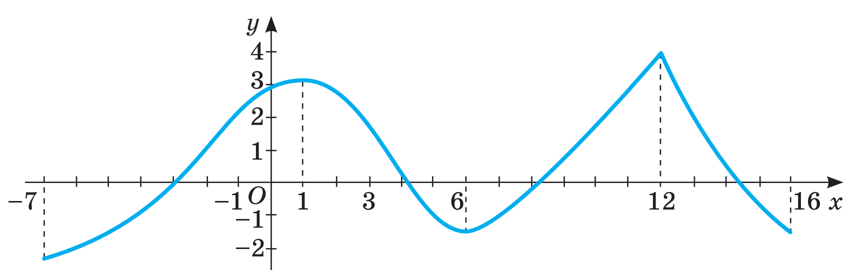
78. Задайте формулою функцію, що виражає залежність площі заштрихованого квадрата від: а) радіуса вирізаного круга (мал. 28, *а*); б) діагоналі квадрата (мал. 28, *б*). Для кожної функції укажіть область визначення та область значень. Установіть, зростаючою чи спадною є кожна з цих функцій.



а *б*

Мал. 28

79. **Практичне завдання.** На малюнку 29 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки, на яких функція зростає; ґ) проміжки, на яких функція спадає; д) найбільше і найменше значення функції. Побудуйте графік функції $y = -f(x)$. Порівняйте властивості функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.



Мал. 29

Вправи для повторення

80. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

81. Які значення змінних задовольняють пропорцію:

а) $(x + 1) : 2 = 4 : (x - 1)$; б) $(x - 4) : 3 = 3 : (x + 4)$?

82. Порівняйте значення виразів:

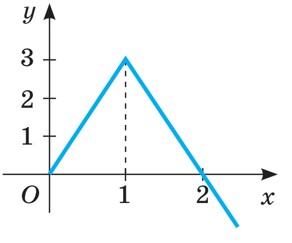
а) $3\sqrt{10}$ і $2\sqrt{22}$; в) $-1{,}5\sqrt{2}$ і $-2\sqrt{1{,}1}$;

б) $-5\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{50}$; г) $0{,}2\sqrt{0{,}1}$ і $0{,}1\sqrt{0{,}2}$.

Самостійна робота 1

Варіант 1

1 Тіло рухається зі швидкістю 2,5 км/год. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність пройденого тілом шляху від часу. Побудуйте графік цієї функції. Як називають таку функцію? Який шлях пройде тіло за 4 години?



Мал. 30

2 Чи проходить графік функції $y = \dfrac{2x}{x-1}$ через точку (3; 3)?

3 Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 - 2x$; б) $y = x^2 - 2x + 3$.

4* Зобразіть графік (мал. 30) у зошиті й добудуйте його так, щоб утворений графік задавав парну функцію.

Варіант 2

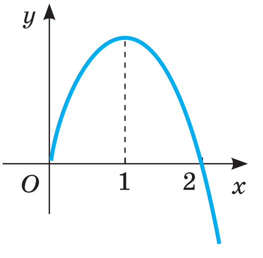
1 Густина речовини 1,5 кг/м^3. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність маси тіла від його об'єму. Побудуйте графік цієї функції. Як називається така функція? Знайдіть масу 2 м^3 даної речовини.

2 Чи проходить графік функції $y = \dfrac{3x}{x+1}$ через точку (2; 2)?

3 Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = x^2 + 2x - 1$.

4* Зобразіть графік (мал. 31) у зошиті й добудуйте його так, щоб утворений графік задавав непарну функцію.



Мал. 31

§ 3. Корені *n*-го степеня

Пригадаємо, що таке квадратний корінь і його арифметичне значення.

> **Квадратним коренем із числа** a називають число, квадрат якого дорівнює a.

З додатного числа квадратних коренів існує два. Наприклад, числа 7 і -7 — квадратні корені із числа 49, оскільки $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$. Невід'ємне значення квадратного кореня із числа a називають арифметичним значенням квадратного кореня із числа a і позначають символом $\sqrt{a}$. Друге значення квадратного кореня із числа a дорівнює $-\sqrt{a}$. Квадратний корінь із числа 0 дорівнює 0. Квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

> **Коренем** n**-го степеня із числа** a називають число, n-й степінь якого дорівнює a.

> Невід'ємний корінь n-го степеня з додатного числа a називають **арифметичним значенням кореня** n**-го степеня із числа** a. Його позначають символом $\sqrt[n]{a}$.

Квадратний корінь називають ще *коренем другого степеня*.

Подібно до коренів другого степеня існують також корені третього, четвертого, ..., n-го степенів.

Якщо показник кореня n — число непарне, то при кожному значенні a значення кореня n-го степеня з числа a існує, і його також позначають $\sqrt[n]{a}$. У виразі $\sqrt[n]{a}$:

a — підкореневий вираз, $\sqrt{\ }$ — знак кореня, n — показник кореня.

Зверніть увагу! Символ $\sqrt[n]{a}$ використовують тільки для позначення арифметичного кореня та кореня непарного степеня з числа a.

Приклади:

а) $\sqrt[3]{-64} = -4$, оскільки $(-4)^3 = -64$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$;

в) $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, оскільки $0,1^5 = 0,00001$.

Обчислення значень коренів n-го степеня із чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел. З деяких чисел корені можна добувати усно, з інших — користуючись калькулятором або таблицями.

Якщо натуральне число n парне, то $\sqrt[n]{a}$ — це *арифметичний корінь* із числа $a \geq 0$, тобто невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a. У цьому випадку область визначення виразу $\sqrt[n]{a}$ — множина всіх невід'ємних дійсних чисел. Наприклад, для виразу $\sqrt{x-5}$ — область визначення $[5; +\infty)$, для $\sqrt[4]{x+7}$ — область визначення $[-7; +\infty)$.

При непарному натуральному n вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст і тоді, коли число a від'ємне, наприклад: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[9]{0} = 0$, $\sqrt[5]{-0,00032} = -0,2$.

Для додатних підкореневих виразів і довільних показників коренів справджуються властивості, аналогічні властивостям квадратних коренів:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

5) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;

6) $\sqrt[n]{a^{nk}} = a^k$.

Довести ці властивості коренів n-х степенів можна так само, як і раніше (у 8-му класі) доводилися відповідні властивості квадратних коренів. Доведемо першу властивість (її називають *основною властивістю коренів*).

Доведення. Якщо a і b — довільні невід'ємні числа, то числа $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{ab}$ і $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ також невід'ємні. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Отже, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ — невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює ab, тобто $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Теорему про корінь з добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a, b і c невід'ємні, то

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab) \cdot c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Якщо в наведених тотожностях поміняти місцями їхні ліві й праві частини, дістанемо:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Ці тотожності показують, як можна множити і ділити корені. Наприклад,

$$\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{20 \cdot 50} = \sqrt[3]{1000} = 10, \quad \frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{486}{6}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

На основі властивостей (1–6) вирази, які містять корені, можна множити, ділити, підносити до степеня і добувати з них корені.

Зверніть увагу! $\sqrt[n]{a^n} = a$, якщо $a \geq 0$; $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Приклади:

а) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6$;

б) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$;

в) $\left(2\sqrt[4]{9}\right)^6 = 2^6 \cdot \left(\sqrt[4]{9}\right)^6 = 64 \cdot \left(\sqrt{9}\right)^3 = 64 \cdot 3^3 = 1728$.

Щоб помножити корені з різними показниками, їх спочатку зводять до спільного показника:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}.$$

Дії додавання і віднімання виконують з *подібними коренями* (у яких показники коренів і підкореневі вирази однакові).

Приклади:

а) $2\sqrt{17}+3\sqrt{17}=5\sqrt{17}$;   б) $a\sqrt[5]{17}-2a\sqrt[5]{17}=-a\sqrt[5]{17}$.

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями (за умови, що $a \geq 0$, $b \geq 0$).

Винесення множника за знак кореня. У загальному вигляді це перетворення виконують у такий спосіб:

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}.$$

Приклади:

а) $\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{81\cdot 10}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10}=3\sqrt[4]{10}$;

б) $\sqrt[5]{64a^7b^{10}}=\sqrt[5]{32\cdot a^5\cdot\left(b^5\right)^2\cdot 2a^2}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{\left(b^5\right)^2}\cdot\sqrt[5]{2a^2}=$

$=2\cdot a\cdot b^2\cdot\sqrt[5]{2a^2}=2ab^2\cdot\sqrt[5]{2a^2}$.

Внесення множника під знак кореня. Це перетворення, обернене до попереднього.

Приклади:

а) $5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3\cdot 4}=\sqrt[3]{500}$;

б) $2a^3b\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{\left(2a^3b\right)^4}\cdot\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{16a^{12}\cdot b^4\cdot a\cdot b^3}=\sqrt[4]{16a^{13}\cdot b^7}$.

Звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику. У загальному вигляді (при $a>0$, $m<n$) це перетворення виконують так:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Приклади:

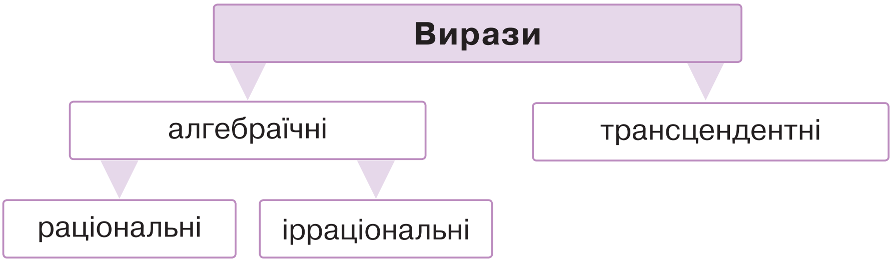
а) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{3}}=\dfrac{15\cdot\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{15\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}}=\dfrac{15\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3}=5\cdot\sqrt[4]{27}$;

б) $\dfrac{b}{\sqrt[3]{2ab^2}}=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot a^2b}}{\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{2^2a^2b}}=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{4a^2b}}{\sqrt[3]{2ab^2\cdot 4a^2b}}=\dfrac{b\sqrt[3]{4a^2b}}{2ab}=\dfrac{\sqrt[3]{4a^2b}}{2a}$.

Увівши символи $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ..., $\sqrt[n]{\ }$, ми тим самим розширюємо множину відомих вам виразів. Уведемо кілька назв для розглядуваних виразів. Якщо вираз, крім чисел, змінних, дужок і знаків дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником або добування кореня, не містить нічого іншого, його називають **алгебраїчним виразом.** Алгебраїчний вираз, який містить корені, називають **ірраціональним виразом.** Усі інші алгебраїчні вирази — **раціональні.**

Вирази із числами або змінними, які не є алгебраїчними, називають **трансцендентними.** Такими, зокрема, є тригонометричні вирази.

Зв'язки між названими видами виразів показано на схемі.



Перевірте себе

1. Що називають коренем n-го степеня із числа a?
2. Що називають коренем п'ятого степеня із числа a?
3. Який знак має корінь непарного степеня: а) з додатного числа; б) з від'ємного числа?
4. Яким правилом треба скористатися при визначенні знака кореня непарного степеня?
5. Що називають арифметичним значенням кореня (або арифметичним коренем)?
6. Сформулюйте найважливіші властивості коренів n-го степеня.
7. Сформулюйте основну властивість коренів n-го степеня.

Виконаємо разом

1) Обчисліть значення виразу: а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Розв'язання. а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}=2\cdot 8+5\cdot 4=36$;

б) $\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}:\sqrt[6]{\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

2) Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Розв'язання. $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}$.

3) Спростіть вираз $\left(\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt[4]{a}-1\right)$.

Розв'язання. Даний вираз — добуток суми виразів $\sqrt[4]{a}$ і 1 на їх різницю. За формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ маємо: $\left(\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt[4]{a}-1\right)=\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-1^2=\sqrt{a}-1$.

Виконайте усно

Обчисліть **(83–85)**.

83. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{0,0016}$; в) $\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[3]{-125}$; ґ) $\sqrt[5]{32^{-5}}$; д) $\sqrt[3]{-0,008}$.

84. а) $\sqrt[3]{8000}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[3]{-1000}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; ґ) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; д) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

85. а) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3$; б) $\sqrt[6]{7^6}$; в) $\sqrt[8]{9^4}$; г) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$; ґ) $-\sqrt[4]{9^4}$; д) $\sqrt[4]{(-9)^4}$.

86. Що більше:

а) $\left(\sqrt[8]{90}\right)^8$ чи $\left(\sqrt[9]{85}\right)^9$; б) $\sqrt[6]{11^2}$ чи $\sqrt[3]{11}$; в) $\sqrt[9]{6}$ чи $\sqrt[18]{36}$?

87. Знайдіть ребро куба, якщо його об'єм дорівнює:

а) 1 дм^3; б) 27 см^3; в) 64 мм^3; г) 0,008 м^3; ґ) 0,125 дм^3; д) 0,216 м^3.

88. Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{7^5}:\sqrt[4]{7}$; в) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$.

А

Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа **(89, 90)**.

89. а) 0,81; б) 0,25; в) 2,25; г) 1,21.

90. а) $\frac{36}{169}$; б) $\frac{144}{289}$; в) $\frac{169}{100}$; г) $\frac{81}{256}$.

Знайдіть арифметичний корінь четвертого степеня із числа **(91, 92)**.

91. а) 0; б) 1; в) 16; г) 0,0016.

92. а) $\frac{16}{81}$; б) $\frac{256}{625}$; в) 0,0001; г) 0,1296.

Знайдіть кубічний корінь із числа **(93, 94)**.

93. а) 216; б) 64; в) 343; г) 8.

94. а) $\frac{1}{27}$; б) 0,027; в) 0,001; г) $\frac{64}{125}$.

Обчисліть **(95–97)**.

95. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{-125}$; г) $\sqrt[3]{0,027}$; ґ) $\sqrt[3]{0,000216}$; д) $\sqrt[3]{-343}$.

96. а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[4]{0,0081}$; г) $\sqrt[4]{0,00000016}$; ґ) $\sqrt[4]{2401}$.

97. а) $\sqrt[3]{-1000}$; б) $\sqrt[5]{-3125}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; г) $\sqrt[5]{-1024}$; ґ) $\sqrt[5]{-0,00032}$.

Спростіть вираз **(98–101)**.

98. а) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$; в) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2$.

99. а) $\left(2\sqrt{3}+4\right)\left(2\sqrt{3}-4\right)$; б) $\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(3\sqrt{5}+2\right)$; в) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$; г) $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

100. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$; г) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$.

101. а) $\sqrt[3]{(-2)^6}$; б) $\sqrt[3]{(-4)^9}$; в) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$; г) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}$.

102. Розгадайте ребус $\sqrt[3]{\frac{\text{О}}{\boxed{7}}}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (тут і далі $a \geq 0$, $b \geq 0$) **(103, 104).**

103. а) $\sqrt[3]{3000}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[4]{324}$.

104. а) $\sqrt[4]{162a^6}$; б) $\sqrt[3]{32a^5b^3}$; в) $\sqrt[6]{a^6b^7}$; г) $\sqrt[5]{a^{11}b^6}$.

Внесіть множник під знак кореня **(105, 106).**

105. а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[6]{0,25}$; г) $a\sqrt[5]{2}$.

106. а) $ab\sqrt[4]{5}$; б) $a^2\sqrt[3]{ab}$; в) $3a\sqrt[4]{2b}$; г) $0,5b\sqrt[5]{(2b)^3}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику **(107, 108).**

107. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a}}$; в) $\dfrac{10a}{\sqrt[5]{2a^2}}$; г) $\dfrac{6ab^2}{\sqrt[5]{8b}}$.

108. а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$.

Розв'яжіть рівняння **(109, 110).**

109. а) $x^2 = 64$; б) $x^2 = 0,49$; в) $x^2 = 121$; г) $x^3 = 125$; ґ) $x^3 = 0,008$.

110. а) $x^3 = -1$; б) $x^3 = -64\,000$; в) $x^4 = 256$; г) $x^5 = 32$; ґ) $x^4 = 0,0625$.

Б

111. Обчисліть:

а) $\sqrt[4]{1296}$; б) $\sqrt[4]{2401}$; в) $\sqrt[6]{15\,625}$; г) $\sqrt[12]{4096}$.

Обчисліть значення виразу **(112–115).**

112. а) $\sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36}+\sqrt[4]{16}$; в) $12-6\sqrt[3]{0,125}$; г) $1+10\sqrt[4]{0,0081}$.

113. а) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}+\sqrt{2,25}$; в) $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{64}+\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{64}$.

114. а) $\sqrt[3]{1}+\sqrt{4}-\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36}-\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt{0,81}+\sqrt[3]{0,001}$; г) $\sqrt[3]{0,027}-\sqrt{0,04}$.

115. а) $5-\sqrt[4]{256}$; б) $7+\sqrt[3]{8}-\sqrt[7]{128}$; в) $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{81}$.

116. Установіть відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt[3]{27}+\sqrt[5]{32}$	**А** 6
2 $\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt{3}$	**Б** 4
3 $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$	**В** $-\dfrac{1}{6}$
4 $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}+\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$	**Г** 5
	Д $\dfrac{1}{5}$

117. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{324}$.

118. Спростіть вираз:

а) $\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)$; в) $\sqrt[3]{4a}\left(\sqrt[3]{2a^2}+\sqrt[3]{2a^{-1}}\right)$;

б) $\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^4}\right)$; г) $\left(\sqrt[4]{a^3x}-\sqrt[4]{ax^3}\right):\sqrt[4]{ax}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу **(119–122)**.

119. а) $\dfrac{5}{\sqrt[6]{125}}$; б) $-\dfrac{4}{\sqrt{12}}$; в) $-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{3}}$.

120. а) $\dfrac{6}{0,5\sqrt[4]{32}}$; б) $\dfrac{9}{4\sqrt[8]{64}}$; в) $\dfrac{3}{7\sqrt[6]{81}}$.

121. а) $\dfrac{4}{1+\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{15}{1-\sqrt{6}}$; в) $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

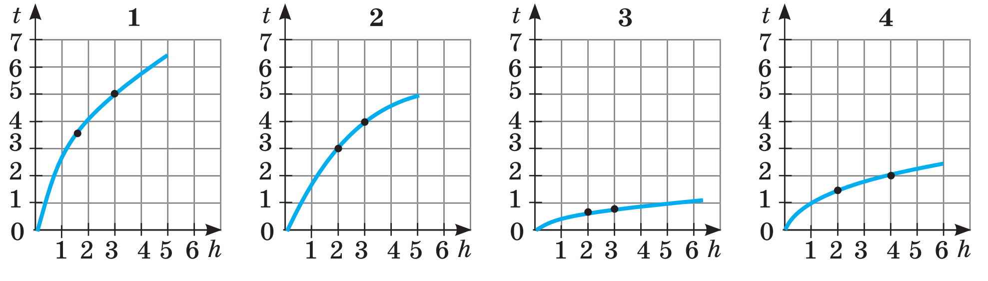
122. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$; б) $\dfrac{7}{\sqrt{7}-7}$; в) $\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Розв’яжіть рівняння **(123, 124)**.

123. а) $x^2 = 11$; б) $x^4 = 16$; в) $x^8 = 25$; г) $x^9 = -27$.

124. а) $\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt{x}=1$; в) $\sqrt[3]{x}=2$; г) $\sqrt{x}=-3$.

125. **Практичне завдання.** З літака, що рухається на висоті 1020 м над землею, стрибає парашутист. Його шлях h (у метрах), пройдений в умовах вільного падіння, визначається формулою: $h = 0,5gt^2$, де t — час (у секундах), а g — стале число $g \approx 10$ м/с^2.
Парашут розкрився за 975 м від землі. а) Задайте формулою залежність часу вільного падіння парашутиста від пройденого шляху. б) Побудуйте графік встановленої залежності. в) З’ясуйте, скільки часу парашутист летів в умовах вільного падіння. г) На якому графіку подано залежність часу t руху тіла при вільному падінні від довжини шляху h (мал. 32)?



Мал. 32

Вправи для повторення

126. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{a^2b}{cd^3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4\cdot\left(\dfrac{c^2}{b^3d}\right)^3$.

127. Знайдіть 2,5 % від числа: а) 10; б) 250; в) $3 \cdot 10^7$.

128. Справжньою екологічною проблемою сьогодні є «цвітіння» води, що спричинене скупченням біля поверхні води ціанобактерій (мал. 33). Вода забарвлюється в синьо-зелений або коричневий колір і набуває болотного запаху, викликаного процесами гниття. У воді з'являються отруйні речовини, зменшується кількість кисню, унаслідок чого гине риба й інші водні мешканці. Уявіть, що ви перебували біля водойми протягом 3 годин. Скільки бактерій утвориться за цей час зі 100 таких бактерій, якщо за сприятливих умов кожна ціанобактерія ділиться на дві ідентичні дочірні кожні 20 хвилин.

Дізнайтеся, чи мають якусь користь ціанобактерії для людини.

Мал. 33

129. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{4,2+2x}{3} > 1,5x - 1,1$;

б) $2,3a + 0,8 < \dfrac{5,8a+3,4}{2}$;

в) $\dfrac{0,6m+1,2}{12} \le \dfrac{1,5m-2,5}{15}$;

г) $\dfrac{1,3a-0,7}{4} - \dfrac{0,9a+0,3}{3} > 0$.

§ 4. Степені з раціональними показниками

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

> !
>
> **1.** Степенем числа a з натуральним показником $n > 1$ називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a, тобто
>
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$
>
> **2.** Степенем числа a з показником 1 називають число a: $a^1 = a$.
>
> **3.** Будь-яке відмінне від нуля число в степені 0 дорівнює 1, тобто якщо $a \ne 0$, то $a^0 = 1$.
>
> **4.** Якщо n — довільне натуральне число, а $a \ne 0$, то
>
> $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ці означення повністю розкривають зміст поняття *степеня із цілим показником*. Наприклад,

$$\left(\sqrt{2}\right)^0 = 1,\quad 3^{-1} = \frac{1}{3},\quad a^{-3} = \frac{1}{a^3},\quad (2x)^{-4} = \frac{1}{(2x)^4}.$$

Степінь a^n має зміст при кожному цілому n і дійсному $a \ne 0$. А, наприклад, вирази 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} і т. п. не мають змісту — це не числа.

Виявляється, можна розглядати степені також із дробовими показниками.

Степенем показника $\frac{m}{n}$ **з додатного числа** a називають корінь n-го степеня із числа a^m, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для степенів додатних чисел a, b з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі властивості, як і для степенів із цілими показниками:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; **2)** $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$; **4)** $(ab)^r = a^r b^r$; **5)** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Ці властивості випливають з доведених властивостей коренів n-го степеня. Для прикладу доведемо першу властивість.

Доведення. Нехай $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{t}$. Зведемо ці звичайні дроби до спільного знаменника: $r = \frac{mt}{nt}$, $s = \frac{pn}{tn}$. Тоді

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{mt}{nt}} \cdot a^{\frac{pn}{tn}} = \sqrt[nt]{a^{mt}} \cdot \sqrt[nt]{a^{pn}} = \sqrt[nt]{a^{mt+pn}} = a^{\frac{mt+pn}{nt}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{t}} = a^{r+s}.$$

Із цих властивостей випливає, що *вирази з дробовими показниками степенів і додатними основами можна перетворювати, як і вирази із цілими показниками*. Наприклад,

$$a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right); \quad \left(x^{\frac{3}{2}} - c\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - c^2 = x^3 - c^2.$$

Таке трактування степеня з дробовим показником відповідає введеному раніше поняттю степеня із цілим показником. Тому їх можна об'єднати і говорити *про степені з раціональними показниками*.

Обчислюючи степені з раціональними показниками, можна користуватися тотожностями $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ і $a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}} = a^{\frac{m}{n}}$ (доведіть їх самостійно).

Приклади:

а) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$; б) $32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16$; в) $2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$.

При будь-яких додатних основах значення степенів із дробовими показниками (здебільшого наближені) можна обчислювати, користуючись калькулятором.

Приклади. Обчисліть значення: а) $0{,}2^{-3}$; б) $5^{0{,}43}$.

Розв'язання. а) 0 , 2 x^y (− 3) = 125. Отже, $0{,}2^{-3} = 125$.

б) 5 x^y 0 , 4 1 = 1,9345; $5^{0{,}41} \approx 1{,}9$.

Зверніть увагу! Степені з дробовими показниками розглядають тільки за умови, що їх основи — числа додатні. А, наприклад, вирази $0^{-0{,}5}$, $(-2)^{\frac{2}{3}}$, $(-\pi)^{1{,}3}$ не мають змісту. Це — записи, які не позначають ніяких чисел.

Перевірте себе

1. Що називають n-м степенем числа a?
2. Що розуміють під степенем числа із цілим від'ємним показником?
3. Чи можна підносити число 0 до степеня з від'ємним показником?
4. Що розуміють під степенем із дробовим показником?
5. Які властивості мають степені додатних чисел із раціональними показниками?

Виконаємо разом

1) Обчисліть: $3^{0,5} \cdot 9^{0,75}$.

Розв'язання. $3^{0,5} \cdot 9^{0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{2 \cdot 0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{1,5} = 3^2 = 9$.

2) Спростіть вираз: $(c^{0,5} - 1)(c^{0,5} + 1)$.

Розв'язання. $(c^{0,5} - 1)(c^{0,5} + 1) = (c^{0,5})^2 - 1 = c - 1$.

3) Скоротіть дріб: $\dfrac{x^{0,75} - 25x^{0,25}}{x^{0,5} + 5x^{0,25}}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та скоротимо його:

$$\frac{x^{0,75} - 25x^{0,25}}{x^{0,5} + 5x^{0,25}} = \frac{x^{0,25}\left(x^{0,5} - 25\right)}{x^{0,25}\left(x^{0,25} + 5\right)} = \frac{\left(x^{0,25} - 5\right)\left(x^{0,25} + 5\right)}{x^{0,25} + 5} = x^{0,25} - 5.$$

Виконайте усно

Обчисліть **(130–132)**.

130. а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $625^{\frac{1}{4}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$.

131. а) $5 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; б) $3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$; в) $-2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$; г) $2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$.

132. а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; г) $0,0016^{\frac{3}{4}}$.

133. Знайдіть десятий степінь числа: а) 1; б) –1; в) 0.

134. Знайдіть значення виразу $x \cdot x^{-2}$, якщо $x = -4$.

А

Спростіть вираз **(135–141)**.

135. а) $2^{-1} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$; б) $3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; в) $100^{-\frac{1}{2}}$.

136. а) $(27 \cdot 125)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(\dfrac{1}{36} \cdot 0,04\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\dfrac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

137. а) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 7^0$ **(1)**; б) $81^{-\frac{3}{4}} \cdot 3^4$ **(2)**; в) $49^{\frac{3}{2}} \cdot 49^0$ **(3)**; г) $0,25^{-\frac{1}{2}} \cdot 3,5$ **(4)**.

138. а) $8^{\frac{5}{3}} \cdot 4^{-2}$ **(5)**; б) $3^{0,5} \cdot 9^{\frac{3}{4}} \cdot 3$ **(6)**; в) $0,4^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,4^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,4$ **(7)**; г) $64^{-\frac{3}{2}} \cdot 16^2$ **(8)**.

139. а) $81^{-\frac{3}{4}}$ **(9)**; б) $64^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^4$ **(10)**; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$ **(11)**; г) $144^{0,5} \cdot 0,25^{1,5}$ **(12)**.

140. а) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; б) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **(13)**; в) $(0,008)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{-1}$ **(14)**; г) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{0,25} \cdot 36^{1,5}$.

141. Якщо ви правильно розв'яжете завдання 137–140 і встановите відповідність між отриманими числами і буквами таблиці, то зможете дізнатися, хто з видатних українських математиків був ініціатором уведення поняття функції у шкільний курс математики.

1,5	0,5	27	1	343	4	8	$\frac{2}{3}$	3	7	5	2	16	$\frac{1}{27}$
К	А	Г	Р	Т	О	Ь	И	С	Р	Й	О	С	Д

Обчисліть, не користуючись калькулятором **(142–144)**.

142. а) $2^{-3} - 0,5^3$; б) $8 \cdot 2^{-4}$; в) $1,2^0 - 2^{-4} \cdot 8$.

143. а) $3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{0,1}$; б) $2^{0,3} \cdot 2^{-0,7} - 2^{1,4}$; в) $-10 \cdot 32^{-1,5} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$.

144. а) $\left(5^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(5^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; б) $\left(2^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $2^{\frac{1}{2}}\left(8^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$.

Спростіть вираз **(145–147)**.

145. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $(a^{0,5} + b^{0,5})(a^{0,5} - b^{0,5})$.

146. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2(ab)^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(x - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x\right) + y$.

147. а) $(1 - c) : (1 - c^{0,5})$; б) $c^2x^{-0,5}(c^{-1}x^{0,5} + c^{-2}x^{0,5})$.

148. Яке із чисел більше:

а) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ чи $\left(0,64^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$; б) $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ чи $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$?

149. Обчисліть за допомогою калькулятора:

а) $3,2^{0,2}$; б) $0,52^{-1,3}$; в) $13^{2,7} \cdot 2,5$; г) $3,5^{-4} \cdot 6^{2,3}$.

150. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $x^{\frac{1}{5}}$; б) $(x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $ax^{\frac{4}{3}}$; г) $(c-2)^{\frac{3}{4}}$; ґ) $(x^2 - x + 5)^{\frac{3}{2}}$; д) $c(1-b)^{-\frac{2}{3}}$.

151. Запишіть без знаків кореня вираз:

а) $\sqrt[7]{x}$; б) $\sqrt[5]{(a-2)}$; в) $a^2\sqrt{x-a}$; г) $\sqrt[4]{3a^2 + c^2}$; ґ) $3 : \sqrt[5]{x+2}$; д) $\sqrt[4]{x + \sqrt{x}}$.

152. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{5}}$; б) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$; в) $a^{\frac{1}{2}} - ax^{\frac{2}{3}}$; г) $(m^{0,5} + x^{1,5})^{0,5}$.

Б

153. Установіть відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д), якщо $x \neq 0$.

1	$\left(x^{0,4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{0,8}$	**А**	$x^{0,1}$
2	$x\left(x^{-1,2}\right)^{\frac{3}{4}}$	**Б**	1
3	$\left(x^{0,8}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(x^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5}$	**В**	x
4	$\left(\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{1,5}\right)^{\frac{4}{3}}$	**Г**	$x^{1,2}$
		Д	$x^{2,5}$

154. Подайте у вигляді степеня:

а) $c^2c^{-1,5}c^{0,3}$; б) $(a^{0,8})^{0,5} \cdot a^{0,6}$; в) $x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{x}$; г) $(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4}$; ґ) $\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt[5]{c}$.

Обчисліть **(155–158)**.

155. а) $10^{\frac{2}{8}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$; в) $3 \cdot 9^{0,4} \cdot \sqrt[5]{3}$; ґ) $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$; д) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

156. а) $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 2^{1,4}$; б) $7^{-\frac{4}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} \cdot 7^{-\frac{3}{4}}$; в) $4^{0,7} \cdot 2^{-0,4}$; г) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$; ґ) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1,5}$.

157. а) $(0,0001)^{-\frac{3}{4}}$; б) $3^{\frac{4}{3}} \cdot 9^2 \cdot 27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}}$; в) $5^{\frac{4}{5}} \cdot 125 \cdot 25^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$; г) $27^{\frac{2}{3}} : (0,064)^{-\frac{1}{3}}$.

158. а) $8^{\frac{7}{3}} : 81^{1,75}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{2}} + 81^{0,75} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

б) $100^{\frac{1}{3}} \cdot 0,2^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 27^{\frac{2}{3}} - 25^{0,5}$.

Спростіть вираз **(159–162)**.

159. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; в) $(a-b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$;

б) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$.

160. а) $\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; в) $(a-8) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 2\right)$;

б) $\left(n^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{1}{3}} + 4\right)$; г) $(1-x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

161. а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{2}} + 1}$; б) $\dfrac{x+c}{x^{\frac{2}{3}} - (xc)^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}$; в) $\dfrac{c-x}{(cx)^{0,5} + x}$; г) $\dfrac{a^{1,3}x + a^{0,3}}{ax^{1,3} + x^{0,3}}$.

162. а) $\dfrac{a-1}{a^{0,75}+a^{0,5}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$; в) $\dfrac{c-1}{c+\sqrt{c}+1}:\dfrac{c^{0,5}+1}{c^{1,5}-1}+2c^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\dfrac{2\left(x^{0,25}-y^{0,25}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y.$

163. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

164. **Практичне завдання.** Підготуйте презентацію про життєвий і творчий шлях видатного українського математика, прізвище якого ви дізналися, виконуючи завдання 141 (с. 38).

Вправи для повторення

165. Власник еко-магазину підвищив ціну на органічні овочі на 25 %, але, як з'ясувалося, його товар перестали купувати за такими високими цінами. На скільки відсотків тепер слід знизити ціни на овочі, щоб отримати початкову ціну?

166. Розв'яжіть рівняння:
а) $4x(x-1)=3$; б) $z(z-1)=20$.

167. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера співвідношення між поняттями «функції», «парні функції», «непарні функції».

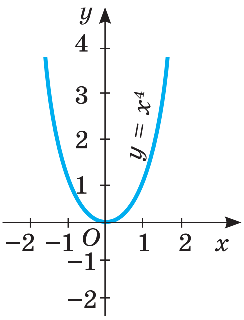
168. Побудуйте графік функції: а) $y=3x$; б) $y=x^{-2}$; в) $y=\sqrt{x}$.

§ 5. Степеневі функції

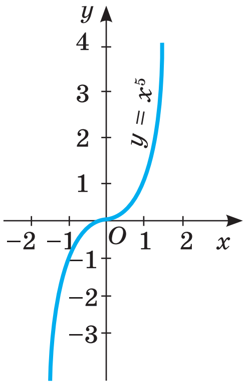
> Функцію, яку можна задати формулою $y=x^{\alpha}$, де x — аргумент, а α — дане число, називають **степеневою**.

Уже відомі вам функції $y=x^2$ і $y=x^3$ (див. табл. 1, с. 11) — приклади степеневих функцій. Аналогічні властивості мають також усі інші степеневі функції з натуральними показниками a. На малюнках 34 і 35 подано графіки степеневих функцій $y=x^4$ і $y=x^5$. Кожна степенева функція з натуральним показником степеня визначена на множині всіх дійсних чисел R.

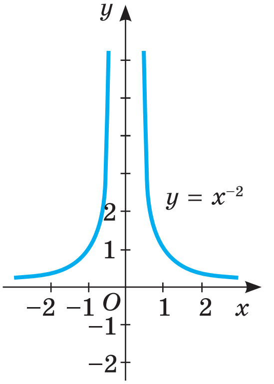
Властивості функції $y=x^{2k}$, $k\in N$, схожі з властивостями функції $y=x^2$, а функції $y=x^{2k+1}$, $k\in N$, — із властивостями функції $y=x^3$. Проаналізуйте їх, використовуючи малюнки 34 і 35 або таблицю 1 на с. 11.



Мал. 34



Мал. 35

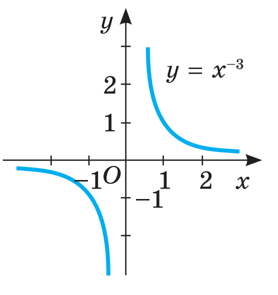


Мал. 36

Якщо показник α степеневої функції — ціле від'ємне число, то вона визначена на множині всіх дійсних значень аргументу x, за винятком $x = 0$. Наприклад, функція $y = x^{-1}$ — це вже відома вам обернена пропорційність $y = \dfrac{1}{x}$ (див. мал. 20).

На малюнках 36 і 37 зображено графіки функцій $y = x^{-2}$ і $y = x^{-3}$.

Якщо α — від'ємне парне число, то графік функції $y = x^{\alpha}$ симетричний відносно осі ординат, а якщо α — від'ємне непарне, то графік симетричний відносно початку координат. Узагалі, при кожному цілому показнику степеня α функція $y = x^{\alpha}$ парна, якщо число α парне, і непарна при непарному α.



Мал. 37

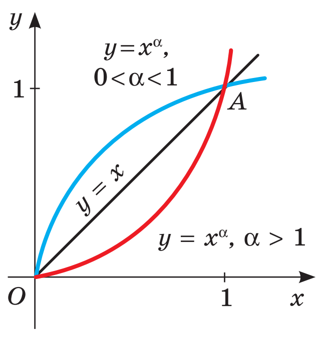
Якщо число α дробове і додатне, то степенева функція $y = x^{\alpha}$ зазвичай розглядається лише на множині невід'ємних значень аргументу. Такою, зокрема, є функція $y = x^{\frac{1}{2}}$, яку можна записати ще й так: $y = \sqrt{x}$ (див. графік у табл. 1, с. 11).

Зверніть увагу на те, який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку графіком функції $y = x^{\alpha}$ (мал. 38) є:

- відрізок OA, якщо $\alpha = 1$;
- крива, направлена опуклістю вниз, якщо $\alpha > 1$;
- крива, направлена опуклістю вгору, якщо $0 < \alpha < 1$.

Чим більше додатне значення α ($\alpha > 1$), тим нижче від відрізка OA розміщується графік функції $y = x^{\alpha}$.

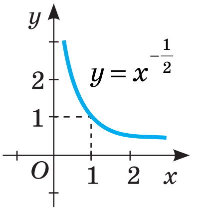
З малюнка 38 також добре видно, що степенева функція $y = x^{\alpha}$ з додатним показником степеня α на множині невід'ємних значень x є *зростаючою*.



Мал. 38

Якщо число α дробове і від'ємне, то степенева функція $y = x^{\alpha}$ розглядається лише на множині додатних значень аргументу. Наприклад, графік функції $y = x^{-\frac{1}{2}}$ зображено на малюнку 39. Зверніть увагу на те, що степенева функція $y = x^{\alpha}$ з від'ємним показником степеня α на множині додатних значень x є *спадною*.

Властивості степеневої функції використовують для розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.



Мал. 39

> Рівняння називають **ірраціональним,** якщо воно містить змінні під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.

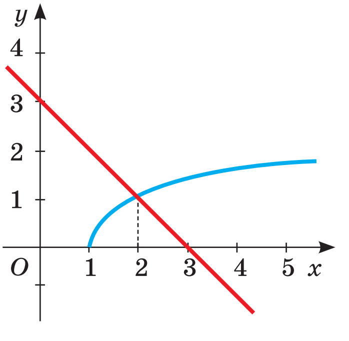
Приклади ірраціональних рівнянь:
$x - 5x^{\frac{1}{2}} + 4 = 0;\ \sqrt{x-1} = 3 - x.$

Деякі з таких рівнянь можна розв'язувати способом заміни.

Так, замінивши в першому рівнянні $x^{\frac{1}{2}}$ на y, дістанемо квадратне рівняння $y^2 - 5y + 4 = 0$, корені якого $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Отже, $x^{\frac{1}{2}} = 1$ або $x^{\frac{1}{2}} = 4$, звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 16$.

Рівняння $\sqrt{x-1} = 3 - x$ можна розв'язати графічним способом (мал. 40). Отримаємо: $x = 2$.



Мал. 40

Більшість ірраціональних рівнянь розв'язують піднесенням обох їх частин до степеня з тим самим натуральним показником. При цьому можуть з'явитися сторонні розв'язки, їх відкидають у результаті перевірки.

Приклад.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2 + x + 11} = 2x + 1$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$3x^2 + x + 11 = 4x^2 + 4x + 1$,

або $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Корені утвореного квадратного рівняння: -5 і 2.

Якщо $x = -5$, то $\sqrt{75 - 5 + 11} = -10 + 1$, але $\sqrt{81} \neq -9$;

якщо $x = 2$, то $\sqrt{12 + 2 + 11} = 4 + 1$, $\sqrt{25} = 5$.

Відповідь. $x = 2$.

На практиці степеневі функції використовують для опису різних економічних процесів, зокрема, їх застосовують для опису кривих байдужості, а також попиту і пропозиції стосовно товарів різних категорій. Попит і пропозиція — важливі елементи ринкової економіки, оскільки їх співвідношення формує ціни на товари та послуги.

Крива попиту (мал. 41) показує можливу кількість товару, який вдається продати за певний час за цінами даного рівня, зокрема і те, що при підвищенні ціни ($P_1 > P_2$) величина попиту зменшується ($Q_1 < Q_2$).

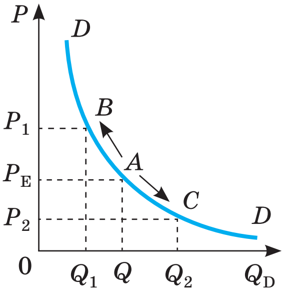
Степенева функція поєднує в собі декілька різних видів функцій.

На малюнку 42 схематично зображено співвідношення між деякими видами функцій. Цифрами 1, 2 і 3 позначено:

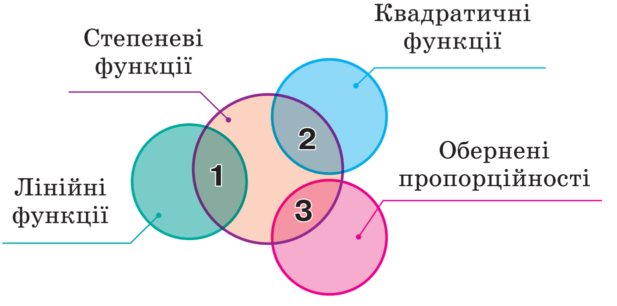
1 — функція, яка водночас є лінійною і степеневою, — тільки одна: $y = x$.

2 — функція, яка водночас є квадратичною і степеневою, — тільки одна: $y = x^2$.

3 — функція, яка водночас є і степеневою, і оберненою пропорційністю, також одна: $y = x^{-1}$.



Мал. 41



Мал. 42

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення степеневої функції з натуральним показником.
2. Які обмеження накладають на аргумент x функції $y = x^n$, якщо $n < 0$?
3. Які види степеневої функції вам відомі?
4. Як розташовано на координатній площині графік функції $y = x^n$, $n \in N$, якщо: а) n — непарне число; б) n — парне число?

Виконаємо разом

1) Чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку $M(16;\ 8)$?

Розв'язання. Якщо $x = 16$, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$. Проходить.

2) Порівняйте вирази $2\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[3]{25}$.

Розв'язання. У першому виразі внесемо множник під знак кореня: $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Оскільки $24 < 25$, а функція $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ — зростаюча, то $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{25}$, звідси $2\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{25}$.

3) Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{5x-2}=2$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до куба. Отримаємо рівняння, рівносильне даному: $5x - 2 = 8$, або $5x = 10$.
Корінь знайденого рівняння $x = 2$ є також коренем даного рівняння.

Виконайте усно

169. Наведіть приклади степеневих функцій.

170. Чи є степеневою функція, задана рівністю $y = x$? А $y = -x^2$?

171. Які з наведених функцій степеневі?

а) $y = x^2$; в) $y = x^{0,3}$; ґ) $y = 3x^{-1}$; е) $y=\dfrac{1}{x^2}$;

б) $y = x^{-1}$; г) $y=x^{\sqrt{2}}$; д) $y = x^2 + x$; є) $y = (2x)^{-1}$.

172. Чи правильно, що графік кожної степеневої функції проходить через точку (1; 1)?

173. Чи може графік степеневої функції проходити через початок координат? Якщо може, то наведіть приклад.

174. Який знак слід поставити в порожні клітинки, щоб отримати правильні нерівності?

а) $2,1^{0,1}\ \square\ 1,2^{0,1}$; б) $2,1^{-5}\ \square\ 1,2^{-5}$; в) $0,3^{-0,5}\ \square\ 0,9^{-0,5}$.

175. Обчисліть значення функції $y=x^{\frac{2}{3}}$ у точках: 0, 1, 8, 1000.

А

176. Побудуйте графік функції $y = x^2$ на проміжку:
а) $[-3; 3]$; б) $[-2; 0]$; в) $[2; 3]$.

177. Дано функцію $y = x^3$ на проміжку $[-2; 1]$. Побудуйте її графік. Чи є дана функція парною або непарною?

178. Відомо, що функція $y = x^8$ при $x = c$ має значення m. Знайдіть значення цієї функції при $x = -c$.

179. Функція $y = x^7$ при $x = c$ має значення m. Знайдіть значення цієї функції при $x = -c$.

180. Доведіть, що графік кожної степеневої функції $y = x^{2n}$ проходить через точки $A(1; 1)$ і $B(-1; 1)$.

181. Чи проходить графік функції $y = x^{0,25}$ через точку $M(16; 8)$? А через точку $M_1(16; 2)$?

182. Які з точок належать графіку функції: а) $y = x^2$; б) $y=\sqrt{x}$?
$A(0,1; 0,01)$; $B(0,16; -0,4)$; $C(-10; 100)$;

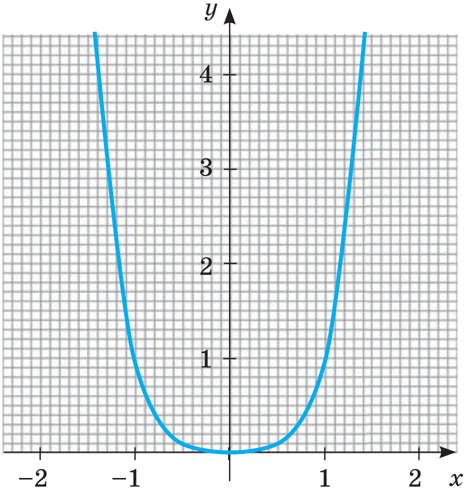
$D\left(-\dfrac{4}{9}; -\dfrac{2}{3}\right)$; $E\left(2\dfrac{7}{9}; 1\dfrac{2}{3}\right)$; $F\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{9}\right)$.

183. Співставте властивості функцій $y = (-x)^2$, $y = -x^2$, $y = x^{-2}$. Які з них степеневі? Побудуйте ескізи їхніх графіків.

184. Користуючись графіком функції $y = x^4$ (мал. 43), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює:
$-1{,}2$; $-1{,}1$; $-0{,}9$; $0{,}9$; $1{,}4$;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює:
$0{,}5$; $1{,}4$; 2; 3; 4.



Мал. 43

185. За графіком функції $y = x^4$ (мал. 43) опишіть її властивості: яка область визначення цієї функції; на яких проміжках вона зростає; на яких спадає; при якому значенні x функція має найменше значення; чи має вона найбільше значення; чи є дана функція парною або непарною.

186. За графіком функції $y = x^5$ (див. мал. 35) опишіть її властивості.

187. Побудуйте графік функції:
а) $y = x^4 + 1$; б) $y = x^5 - 1$; в) $y = (x - 1)^4$; г) $y = (x + 1)^5$.

188. Відомо, що графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $P\left(2; \frac{1}{4}\right)$. Знайдіть значення α.

189. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α, якщо графік функції проходить через точку:
а) $A(7; 49)$; в) $C(144; 12)$; ґ) $M(-64; -4)$;
б) $B(13; 169)$; г) $D(81; 9)$; д) $N(-216; -6)$.

190. При якому значенні α графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $K\left(-2; \frac{1}{4}\right)$?

191. Знайдіть значення функції $f(x)$ у точці x_0, якщо:

а) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = 4$; в) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$;

б) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = 4$; г) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

192. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 1$:
а) $0{,}15^\alpha$ і $0{,}34^\alpha$; б) $0{,}17^\alpha$ і $0{,}23^\alpha$; в) $3{,}1^\alpha$ і $4{,}52^\alpha$; г) $2{,}78^\alpha$ і $6{,}9^\alpha$.

193. Побудуйте схематично графік функції:
а) $y = x^{-2}$; б) $y = x^{-2{,}5}$; в) $y = x^{-5}$.

194. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $x^4 = x$; б) $x^{0{,}5} = 2 - x$; в) $2x^5 = 3 - x$.

Б

195. Порівняйте вирази, якщо $0 < q < 1$:
а) $0{,}47^q$ і $0{,}51^q$; б) $0{,}39^q$ і $0{,}42^q$; в) $3{,}14^q$ і $4{,}73^q$; г) $9{,}2^q$ і $11{,}38^q$.

196. Функцію задано формулою $y = x^q$. Знайдіть q, якщо графік функції проходить через точку:
а) $A(4;\ 0{,}5)$; в) $B(16;\ 0{,}25)$; ґ) $K(625;\ 0{,}2)$;
б) $C\left(27;\ \frac{1}{9}\right)$; г) $P\left(1024;\ \frac{1}{4}\right)$; д) $T\left(243;\ \frac{1}{3}\right)$.

197. Для поданих нижче функцій вкажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання чи спадання:
а) $y = x^9$; б) $y = x^{20}$; в) $y = x^{\frac{13}{3}}$; г) $y = x^{-7}$; ґ) $y = x^{-24}$; д) $y = x^{-\frac{17}{4}}$.

Побудуйте схематично графік функції **(198, 199)**. Перевірте побудовані ескізи за допомогою ПЗ (програмного засобу).

198. а) $y = x^9 - 2$; б) $y = x^{-7} + 1$; в) $y = x^{-12} + 3$.

199. а) $y = x^{12} - 1$; б) $y = x^{-8} + 2$; в) $y = x^{-2{,}5} - 3$.

200. Знайдіть найбільше і найменше значення функцій $y = x^{\frac{3}{2}}$ і $y = x^{-\frac{3}{2}}$ на проміжку $[1;\ 9]$.

201. Запишіть рівняння степеневої функції $y = f(x)$, якщо:
а) $f(-2) = 4$, $f(3) = 9$; б) $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$.

202. **Практичне завдання.** Знайдіть значення функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{5}{2}}$ у точці $x = 3$, коли відомо, що $3^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}73$. Отримані дані запишіть у таблицю.

$3^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3^{\frac{5}{2}}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$3^{-\frac{5}{2}}$

З'ясуйте: а) Яка з функцій має в точці $x = 3$ найбільше значення, а яка — найменше? б) Яка з функцій має найбільше значення, а яка — найменше в точці $x = 1$? в) Які з функцій визначені в точці $x = 0$? А в точці $x = -1$?

Розв'яжіть рівняння **(203–208)**.

203. а) $\sqrt{x+4} = 3$; б) $\sqrt[3]{x+1} = 2$; в) $4 - \sqrt{3x-2} = 0$.

204. а) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{4x+1}$; б) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x^2+1}$; в) $\sqrt[3]{x-50} = 9$.

205. а) $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$; б) $\sqrt[3]{x^2+4x-50} = 3$; в) $\sqrt{23+3x-5x^2} = 3$.

206. а) $x^{-1{,}5} = 8$; б) $y^{-\frac{2}{3}} = 0{,}25$; в) $z^{-0{,}5} = 0{,}5$.

207. а) $z - 5\sqrt{z} + 4 = 0$; б) $2 - x = \sqrt{x}$; в) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 6$; г) $x - 4 = \sqrt{x+8}$.

208. а) $\sqrt[3]{y^3+y^2-6y+8} = y$; б) $\sqrt{2z-3} - \sqrt{z+2} = 0$; в) $2 + \sqrt[3]{x^2-8} = x$.

Вправи для повторення

209. Обчисліть значення виразу:
а) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

210. Якою цифрою закінчується число $a = 123^6 + 111^{12}$?

211. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської води для того, щоб вміст солі в ній становив 2 %?

212. Прочитайте вислів М. Амосова: «*У більшості хвороб винна не природа, не суспільство, а сама людина. Найчастіше вона хворіє через лінощі й жадобу. Щоб бути здоровим, потрібні власні зусилля, постійні й значні*». Полічіть частоту використання у цьому вислові літери «і».

Самостійна робота 2

Варіант 1

1 Обчисліть, не користуючись калькулятором:
а) $9\cdot 3^{-3}$; б) $(-2)^4 + (-3)^3$; в) $\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{24}$.

2 Спростіть вираз: а) $a^2x^{-0,4}(a^{-1}x^{0,4} - a^{-2}x^{1,4})$; б) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}$.

3 Розв'яжіть графічно рівняння: $x^3 = 2 - x$.

Варіант 2

1 Обчисліть, не користуючись калькулятором:
а) $16\cdot 2^{-3}$; б) $(-2)^3 + (-3)^4$; в) $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$.

2 Спростіть вираз: а) $x^{-2}y^{0,6}(x^2y^{-1,6} + xy^{-0,6})$; б) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

3 Розв'яжіть графічно рівняння: $x^2 = 2 - x$.

ТВОРЧІ ЗАВДАННЯ

1. Розкрийте різні способи задання функцій на конкретних прикладах, що стосуються: а) фінансів; б) екології; в) здорового способу життя тощо.
2. З'ясуйте, якими функціями описують процеси, що відбуваються у довкіллі. Доберіть конкретні приклади таких функцій.
3. Ознайомтеся з правилами побудови графіків у кількох різних програмних засобах. Навчіться за їх допомогою будувати графіки функцій, що розглядалися на уроках.
4. Дослідіть, який із відомих програмних засобів доцільно використовувати для графічного розв'язування рівнянь і нерівностей.
5. Підготуйте презентацію на тему «Історія формування поняття „функція“».

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

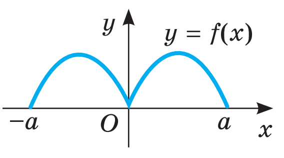
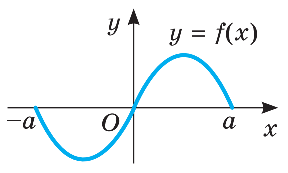
✓ Розумію, що таке функція:
Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають *функцією*.

✓ Знаю основні терміни і символи:
$y = f(x)$ — функція, D — її область визначення, E — область значень.
Якщо D і E — множини числові, то $y = f(x)$ — функція числова.

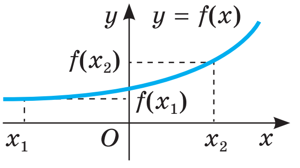
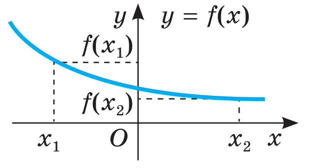
✓ Умію задавати функції різними способами:
формулами, таблицями, графіками, словесно.

✓ Усвідомлюю та вмію використовувати властивості функцій:

- Парність

<table>
<tr><th>Парні функції</th><th>Непарні функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">Область визначення функції симетрична відносно точки O</td></tr>
<tr><td>$f(-x) = f(x)$,
то функція $y = f(x)$ парна</td><td>$f(-x) = -f(x)$,
то функція $y = f(x)$ непарна</td></tr>
<tr><td>Графік симетричний
відносно осі y
</td><td>Графік симетричний
відносно початку координат
</td></tr>
</table>

- Монотонність

<table>
<tr><th>Зростаюча</th><th>Спадна</th></tr>
<tr><td>$x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$
</td><td>$x_2 > x_1$, $f(x_2) < f(x_1)$
</td></tr>
</table>

✓ Знаю та вмію використовувати визначення та позначення $\sqrt[n]{a}$.
Коренем n-го степеня із числа a називають число, n-й степінь якого дорівнює a. Невід'ємний корінь n-го степеня із числа a називають *арифметичним значенням кореня n-го степеня* із числа a.
$\sqrt[3]{64} = 4$, оскільки $4^3 = 64$, $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, оскільки $0,1^5 = 0,00001$.

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Знаю, що обчислення значення коренів n-го степеня із чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел, і вмію виконувати відповідні вправи.
- ✓ Усвідомлюю та вмію використовувати властивості коренів n-го степеня (тут і далі $a > 0$, $b > 0$):

$$1)\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ 2)\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ 3)\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};\ 4)\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\ 5)\ \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

- ✓ Розумію сенс і вмію перетворювати вирази з коренями.

Винесення множника за знак кореня: $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$.

$$\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{81\cdot 10}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10}=3\sqrt[4]{10}.$$

Внесення множника під знак кореня: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$.

$$5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{500}.$$

Звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику дробу:

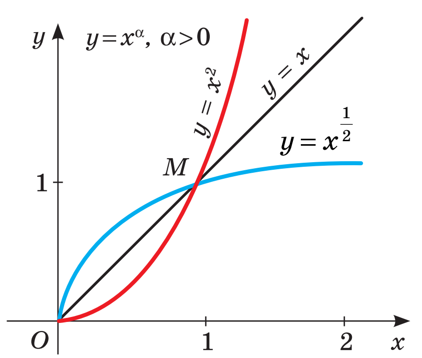
$$\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{ab\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}.$$

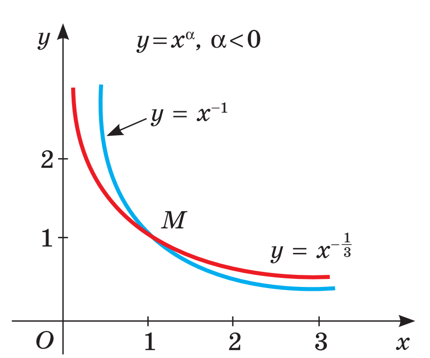
- ✓ Розумію, що називають *степенями з дробовими показниками*: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.
- ✓ Знаю та вмію використовувати властивості степенів із раціональним показником. Якщо r і s — числа раціональні, то:

$$1)\ a^r\cdot a^s=a^{r+s};\ 2)\ a^r : a^s=a^{r-s};\ 3)\ (a^r)^s=a^{rs};\ 4)\ (ab)^r=a^r b^r;\ 5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}.$$

- ✓ Знаю визначення степеневої функції.
- ✓ Усвідомлюю та вмію використовувати властивості *степеневої функції* $y=x^\alpha$, $\alpha\in Q$.

Функція монотонна, ні парна, ні непарна.
При $\alpha > 0$ функція зростаюча, при $\alpha < 0$ — спадна.
Графік функції $y=x^\alpha$ проходить через точку $M(1;\ 1)$.

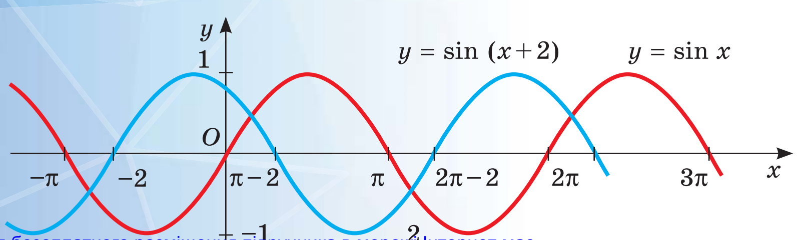




РОЗДІЛ 2.
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

CHAPTER 2.
TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

У цьому розділі розглянемо такі теми:



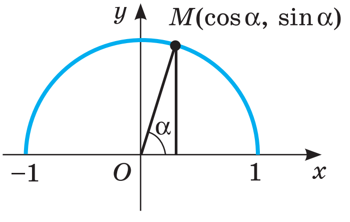
§ 6. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута

У житті ми часто спостерігаємо за процесами, які повторюються через певні проміжки часу. Їх називають *періодичними*. Скажімо, на зміну зимі приходить весна, на зміну весні — літо, на зміну літу — осінь, на зміну осені — зима, знову весна, і все повторюється з року в рік. Так само змінюються ранок, день, вечір і ніч. Періодичні процеси відбуваються в багатьох механізмах (рух поршня, маятника, стрілок годинника) і в живих організмах (пульсація серця, дихання).

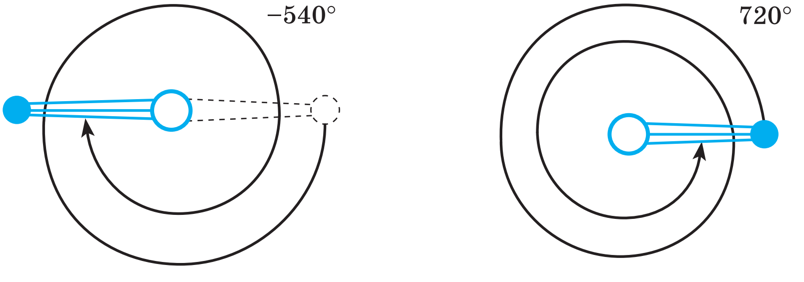
Мати справу з процесами, які *періодично повторюються*, доводиться багатьом фахівцям. Моделювати такі процеси найзручніше за допомогою тригонометричних функцій. Дещо про ці функції ви вже знаєте з уроків геометрії.

Синус (косинус) гострого або тупого кута α — це ордината (абсциса) точки одиничного півкола, яка відповідає куту α (мал. 44).

Зверніть увагу: в геометрії розглядають $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ за умови, що α — кут трикутника або опуклого многокутника, тобто коли $0° < \alpha < 180°$. Досліджуючи ж періодичні процеси або інші обертальні рухи, під α розуміють кут повороту (обертання). А він може бути і як завгодно великим, і від'ємним. Повороти в напрямі руху годинникової стрілки домовилися вважати від'ємними, а в протилежному напрямі — додатними. Наприклад, повернути корбу на $-540°$, на $720°$ — це означає повернути її, як показано на малюнках 45, *а* і *б*.



Мал. 44



а *б*

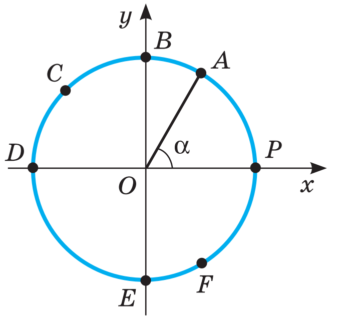
Мал. 45

Одному, двом, трьом, чотирьом ..., n обертам відповідають кути:

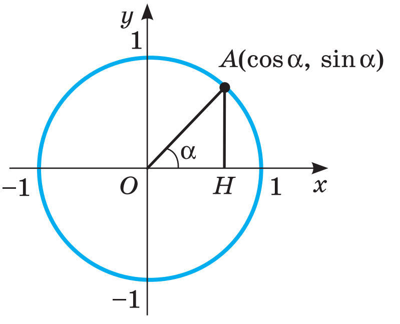
$$360°,\ 720°,\ 1080°,\ 1440°,\ \dots,\ 360° \cdot n.$$

Уведемо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута. Зробимо це за допомогою *одиничного кола*.

Якщо центром кола є початок координат, а його радіус дорівнює 1, то таке коло називають *одиничним колом*.



Мал. 46



Мал. 47

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 46). Кажуть, що точка A одиничного кола відповідає куту α, якщо $\angle POA = \alpha$. Зображені на малюнку 46 точки P, A, B, C, D, E, F, P відповідають кутам 0°, 60°, 90°, 135°, 180°, 270°, 300°, 360° (у межах від 0° до 360°).

!

Синусом кута α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає куту α.

Косинусом кута α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 47).

Тангенсом кута α називають відношення синуса кута α до його косинуса.

Котангенсом кута α називають відношення косинуса кута α до його синуса.

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута α позначають відповідно символами sin α, cos α, tg α, ctg α.

Приклади:

а) Куту 135° на одиничному колі відповідає точка C з абсцисою $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 46). Тому

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tg 135° = −1, ctg 135° = −1.

б) Куту −90° на одиничному колі відповідає точка $E(0; -1)$.
Тому cos (−90°) = 0, sin (−90°) = −1, ctg (−90°) = 0, tg (−90°) не існує.

Тангенс кута α має значення (тобто існує) тоді і тільки тоді, коли $\cos\alpha \neq 0$, адже ділити на 0 не можна. Котангенс кута α має значення тільки за умови, що $\sin\alpha \neq 0$.

Значення sin α, cos α, tg α, ctg α деяких кутів α наведено в таблиці 2.

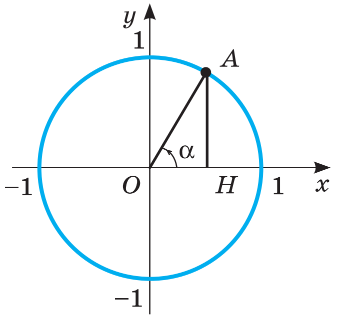
Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити за допомогою калькулятора або спеціальних таблиць (див. форзац).

Кожному значенню кута α відповідає єдине значення sin α (див. мал. 47). Значення sin α залежить від значення α. Тому sin α — функція від α. Функціями від α є також cos α, tg α, ctg α. Детальніше ми розглянемо їх далі, а тут звернемо увагу тільки на найважливіші властивості цих функцій.

Таблиця 2

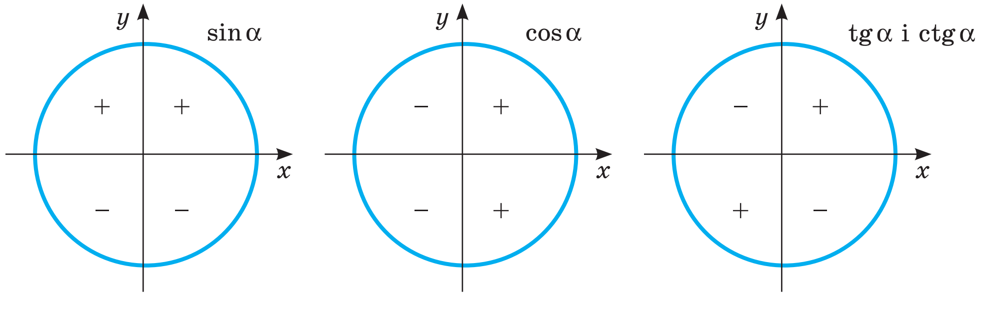
α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\text{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Нагадаємо, що $\sin\alpha$ — це ордината точки A одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 48). Якщо AH — перпендикуляр, опущений з точки A на вісь x, то довжина відрізка AH — *синус* кута α, а OH — *косинус* кута α. Якщо точка A знаходиться у I або II координатній чверті, то $\sin\alpha = AH$; якщо точка A — у III або IV чверті, то $\sin\alpha = -AH$. Кажуть, що у I і II чвертях синус кута α додатний, а в III і IV чвертях — від'ємний.



Мал. 48

Знаки тригонометричних функцій кутів різних координатних чвертей показано на малюнку 49.



Мал. 49

Якщо кут α збільшується від 0° до 90°, то значення $\sin\alpha$ збільшується від 0 до 1. Якщо α збільшується від 90° до 180°, то значення $\sin\alpha$ зменшується від 1 до 0. Якщо α збільшується від 180° до 270°, то значення

$\sin\alpha$ зменшується від 0 до -1. Якщо α збільшується від 270° до 360°, то значення $\sin\alpha$ збільшується від -1 до 0. Отже, для будь-якого значення α:

$$\mathbf{-1 \le \sin\alpha \le 1 \text{ і } -1 \le \cos\alpha \le 1.}$$

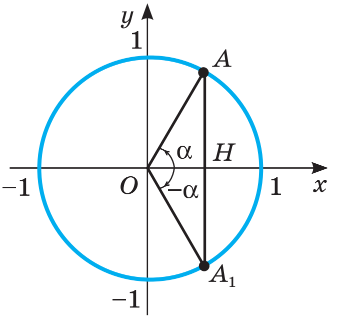
Якщо кут α продовжувати збільшувати, то всі ці властивості повторяться, тобто завжди

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha - 360°) = \sin(\alpha + 720°) = \ldots$$

Узагалі, яким би не був кут α і ціле число n, то: $\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha$, $\text{tg}(\alpha + 360° \cdot n) = \text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}(\alpha + 360° \cdot n) = \text{ctg}\,\alpha$.

Ці співвідношення дають можливість звести знаходження значень синуса, косинуса, тангенса й котангенса будь-якого кута до знаходження їх значень для невід'ємного кута, меншого від 360°. Нехай, наприклад, треба обчислити $\cos 1860°$. Поділивши 1860 на 360, дістанемо частку 5 і остачу 60. Отже,

$$\cos 1860° = \cos(360° \cdot 5 + 60°) = \cos 60° = 0{,}5.$$



Мал. 50

Як видно з малюнка 50, косинуси кутів 60° і $-60°$ однакові, оскільки точки A і A_1 симетричні відносно осі x. Тому $\cos(-60°) = \cos 60°$. І взагалі, косинуси кутів α і $-\alpha$ завжди однакові. Тому, який би не був кут α, завжди $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Відрізки AH і A_1H мають однакові довжини, але розміщені по різні боки від осі x, тому їхні знаки різні.

Отже, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ для кожного значення α.

Таким чином, правильні тотожності:

$$\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha,\ \text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\,\alpha.}$$

Користуючись ними, можна порівняно легко обчислювати значення тригонометричних функцій від'ємних кутів.

Приклади:

а) $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;

б) $\cos(-405°) = \cos 405° = \cos(45° + 360°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Синус, косинус, тангенс і котангенс разом називають *тригонометричними функціями*. Ця назва походить від назви давньої науки *тригонометрії*. Раніше тригонометрію найчастіше використовували для розв'язування трикутників, а за їх допомогою — розв'язування багатьох геометричних і геодезичних задач.

У XX ст. такі задачі навчилися розв'язувати іншими способами й засобами, навіть простіше й точніше, тому тепер тригонометрія втратила попередню цінність і її не відносять до сучасних наук. Але поняття «синус», «косинус», «тангенс» і «котангенс» у різних науках продовжують відігравати важливу роль. Особливо, коли йдеться про різні обертальні рухи, періодичні процеси і явища.

Перевірте себе

1. Що називають синусом кута α? Якого значення він може набувати?
2. Яких значень у виразі $\sin \alpha$ може набувати α?
3. Сформулюйте означення косинуса кута.
4. За яких умов косинус кута додатний? А від'ємний?
5. Що називають тангенсом кута? А котангенсом?
6. При яких значеннях кута α його тангенс не існує? А котангенс?
7. Як змінюється синус кута, якщо кут збільшується:
   а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?
8. Як змінюється косинус кута, якщо кут збільшується:
   а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?
9. Як змінюється тангенс кута, якщо кут збільшується:
   а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?

Виконаємо разом

1) Обчисліть: $\sqrt{3}\sin 60^\circ - 2\sin 90^\circ \cdot \cos 60^\circ + 0,5\,\mathrm{tg}\,45^\circ$.

Розв'язання. Відповідні значення синуса й косинуса знаходимо в таблиці 2 (див. с. 53). Маємо:

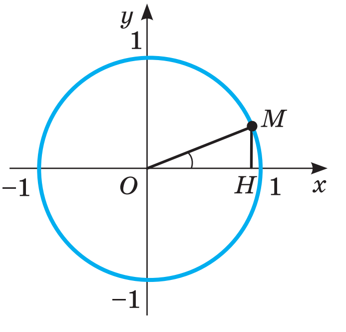
$$\sqrt{3}\sin 60^\circ - 2\sin 90^\circ \cdot \cos 60^\circ + 0,5\,\mathrm{tg}\,45^\circ = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 0,5\cdot 1 =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + 0,5 = 1.$$

2) Встановіть знак виразу: а) $\sin 789^\circ$; б) $\cos 1900^\circ$.

Розв'язання. а) Поділивши 789° на 360, дістанемо частку 2 і остачу 69. Отже, $\sin 789^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 69^\circ) = \cos 69^\circ$. Куту 69° відповідає точка одиничного кола, яка розміщується в I чверті, тому $\sin 69^\circ > 0$ (див. мал. 49, с. 53).

б) Поділивши 1900° на 360, дістанемо частку 5 і остачу 60. Отже, $\cos 1900^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 100^\circ) = \cos 100^\circ$. Куту 100° відповідає точка одиничного кола, яка розміщується в II чверті, тому $\cos 100^\circ < 0$ (див. мал. 49).



Мал. 51

3) Що більше: $\sin 20^\circ$ чи $\cos 20^\circ$?

Розв'язання. Якщо $\angle MOH = 20^\circ$, то $\angle OMH = 70^\circ$ (мал. 51). Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $OH > MH$. Отже, $\cos 20^\circ > \sin 20^\circ$.

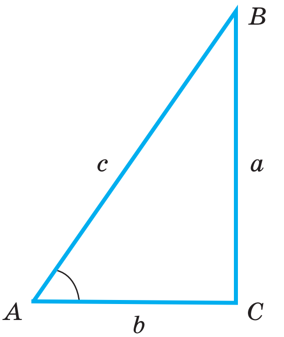
4) Користуючись калькулятором, обчисліть ctg 42°13′.

Розв'язання. а) [1] [3] [÷] [6] [0] [+] [4] [2] [=] [tng] [↑] [$\frac{1}{x}$] = 1,1022016.

Отже, ctg 42°13′ ≈ 1,1022.

Виконайте усно

213. Дивлячись на прямокутний трикутник ABC (мал. 52), укажіть значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса кутів A, B і C.



Мал. 52

214. Чи може абсциса або ордината точки одиничного кола дорівнювати 2?

215. Чи може синус або косинус кута дорівнювати 2? А −2?

216. Чи може синус кута, меншого від 180°, бути числом від'ємним? А косинус?

217. Тангенс якого кута дорівнює 1? А −1?

218. Укажіть значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса прямого кута і кута 45°.

219. Якій чверті належить кут: 100°, 150°, 200°, 250°, 300°, 350°?

А

220. На скільки градусів повертається годинна стрілка протягом півдоби? А хвилинна стрілка?

221. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які відповідають кутам: 30°, 90°, 120°, 180°, 270°, 360°, −30°, −300°.

222. Обчисліть значення кожної тригонометричної функції кутів: 30°, 90°, 120°, 180°, 270°, 360°, −30°, −300°.

223. Куту α на одиничному колі відповідає точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$. Укажіть значення sin α, cos α, tg α, ctg α.

224. Куту β на одиничному колі відповідає точка з абсцисою 0,6. Укажіть значення sin β, cos β, tg β, ctg β.

225. Як змінюється sin α і cos α, якщо α збільшується від 0° до 360°? Заповніть порожні клітинки таблиці.

α	(0°; 90°)	(90°; 180°)	(180°; 270°)	(270°; 360°)
	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
sin α			↘	
cos α	↘			

226. Що більше:
а) $\sin 20°$ чи $\sin 50°$; в) $\sin 20°$ чи $\sin 160°$;
б) $\cos 40°$ чи $\cos 10°$; г) $\cos 10°$ чи $\cos 100°$?

227. Обчисліть:
а) $\sin 30° + \cos 30°$; в) $\sin 45° \cdot \cos 45°$;
б) $\cos 60° - \sin 45°$; г) $2\sin 60° \cdot \cos 60°$.

228. Знайдіть значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута правильного:
а) трикутника; б) чотирикутника; в) шестикутника.

229. Замість зірочки поставте знак > або <:
а) $\cos 5° * \cos 7°$; в) $\sin 178° * \sin 108°$; ґ) $\text{tg}\, 29° * \text{tg}\, 32°$;
б) $\sin 82° * \sin 79°$; г) $\cos 113° * \cos 115°$; д) $\text{tg}\, 97° * \text{tg}\, 107°$.

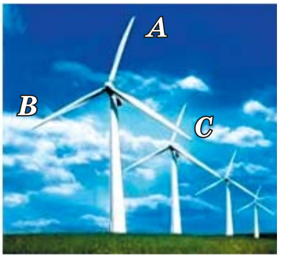
230. Обчисліть значення виразу:
а) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \sin 120°$;
б) $\sin 30° \cdot \cos 150° - \cos 60°\ \text{tg}\, 120°$.

231. Визначте знак добутку:
а) $\sin 120° \cdot \cos 155° \cdot \text{tg}\, 85°$; в) $\text{ctg}\, 124° \cdot \cos 115° \cdot \text{tg}\, 35°$;
б) $\sin 320° \cdot \cos 55° \cdot \text{ctg}\, 185°$; г) $\text{ctg}\, 125° \cdot \cos 77° \cdot \text{tg}\, 305°$.

232. Обчисліть значення тригонометричних функцій за допомогою таблиць і перевірте результат, використовуючи калькулятор:
а) $\sin 12°$, $\sin 33°$, $\sin 72°$, $\sin 50°$; в) $\text{tg}\, 12°$, $\text{tg}\, 33°$, $\text{tg}\, 72°$, $\text{tg}\, 50°$;
б) $\cos 12°$, $\cos 33°$, $\cos 72°$, $\cos 50°$; г) $\text{ctg}\, 12°$, $\text{ctg}\, 33°$, $\text{ctg}\, 72°$, $\text{ctg}\, 50°$.

233. **Практичне завдання.** Підготуйте презентацію про вченого-енциклопедиста Абу Райхана Аль-Біруні, який запропонував розглядати тригонометрію на одиничному колі.

Б



Мал. 53

234. На малюнку 53 зображено промисловий вітрогенератор — пристрій для перетворення кінетичної енергії вітру на електричну.
1) Встановіть, на який із поданих нижче кутів може повернутися лопать A вітрогенератора, щоб перейти на місце лопаті B.
а) $3360°$; в) $6240°$;
б) $-4440°$; г) $-8720°$.
2) Дізнайтеся більше про:
а) історію вітряків та їх використання (мал. 54);
б) розвиток вітроенергетики в Україні;
в) «зелені» тарифи на електричну енергію.

Мал. 54

Визначте знак добутку **(235, 236)**.

235. а) $\cos 30° \cdot \sin 715° \cdot \cos 125° \cdot \text{tg}\, 35°$;
б) $\sin 137° \cdot \cos 150° \cdot \text{tg}\, 22° \cdot \cos 735°$.

236. а) $\text{tg}\, 143° \cdot \sin 565° \cdot \text{tg}\, 87° \cdot \cos 126°$;
б) $\cos 932° \cdot \sin 132° \cdot \cos 135° \cdot \text{tg}\, 92°$.

237. Обчисліть значення виразу:
а) $\sin 30° \cdot \cos 60° - \cos^2 120° + \sin 135° \cdot \cos 90°$;
б) $\text{tg}\, 30° \cdot \text{tg}\, 60° - \text{tg}^2\, 135° + \cos 150°$.

Знайдіть значення виразів **(238, 239)**.

238. а) $\cos \alpha + 3\sin \alpha$, якщо $\alpha = 45°$;
б) $\sin \beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta$, якщо $\beta = 60°$.

239. а) $\sin \gamma + 2\cos \gamma + 3\text{tg}\, \gamma$, якщо $\gamma = 30°$;
б) $\sin \alpha + \cos(\alpha - \beta)$, якщо $\alpha = 90°$ і $\beta = 30°$.

240. Яке найбільше і найменше значення може мати вираз:
а) $3 \sin x$; б) $-\frac{1}{2}\sin x$; в) $1 + \sin x$; г) $\sin x - 1$?

241. Чи може синус або косинус кута дорівнювати:
а) $\sqrt{2}$; б) $2-\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

Користуючись калькулятором чи таблицями, обчисліть значення виразу з точністю до сотих. Порівняйте значення одного виразу, отримані різними способами **(242, 243)**.

242. а) $\sin 17°$; б) $\cos 35{,}7°$; в) $\sin 110°$; г) $10\text{tg}\, 38°$.

243. а) $2 + \cos 49°$; б) $3 - \sin 47°$; в) $2 : \sin 36{,}3°$; г) $2\sin 15° \cos 15°$.

244. а) $\cos 125°$; б) $1 + \sin 25°$; в) $3\, \text{tg}\, 39{,}8°$; г) $\sin 20° - \cos 70°$.

245. Знайдіть міру гострого кута x, якщо:
а) $\sin x = 0{,}5$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$; в) $3\,\text{tg}\, x = \sqrt{3}$.

246. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, якщо:
а) $\text{tg}\, \alpha = 1$; б) $\text{tg}\, \alpha = -1$; в) $2\,\text{tg}\, \alpha = \sqrt{2}$.

247. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\text{tg}\, \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0{,}5$ (кут α — гострий).

248. На малюнку 55 зображено дерев'яний штурвал старовинного парусника. Запишіть кути, які утворює вертикальна спиця цього штурвала з кожною іншою спицею (у додатному напрямі). Знайдіть:
а) синуси і косинуси кожного з цих кутів; б) тангенси найбільшого і найменшого кутів. (Підказка. Уявіть, що штурвал — це одиничне коло).

Мал. 55

249. Що більше:
а) $\sin 10°$ чи $\cos 10°$; б) $\cos 45°$ чи $\sin 45°$?

250. Який з кутів більший — α чи β, якщо:
а) $\sin \alpha = 0{,}75$, $\sin \beta = 0{,}93$; б) $\cos \alpha = 0{,}5$, $\cos \beta = 0{,}6$?

251. Дослідіть, яких значень при різних значеннях α може набувати вираз:
а) $\sin^2 \alpha$; б) $1 - \sin^2 \alpha$; в) $\sin 2\alpha$; г) $2\sin \alpha$?

252. Дослідіть, яких значень може набувати вираз:
$\text{tg}\, \alpha$, $\text{tg}^2\, \alpha$, $\text{tg}\, 2\alpha$, $2\text{tg}\, \alpha$, $1 + \text{tg}^2\, \alpha$.

253. **Практичне завдання.** Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 10 см, поділіть його на 30 рівних частин і складіть таблицю наближених значень синуса й косинуса кутів 3°, 6°, ..., 90°.

Вправи для повторення

254. Циркова арена у формі круга з'явилася у Лондоні в кінці VIII ст. Її діаметр — 42 фути — було обрано таким чином, щоб для вершника, який скаче на коні, створювалася оптимальна відцентрова сила (мал. 56). Зараз усі арени стаціонарних цирків мають саме такі розміри арени. Національний цирк України — один із найстаріших стаціонарних цирків в Україні. Його купол спирається на кільце діаметром 42,3 м. Знайдіть:

Мал. 56

а) площу циркової арени (S_1) і довжину її кола (l_1);

б) довжину кільця (l_2), на яке спирається купол Національного цирку України, та площу відповідного круга (S_2);

в) у скільки разів площа циркової арени S_1 менша від площі S_2.

255. ***Задача Сунь-Цзи.*** Знайдіть число, яке від ділення на 3 має в остачі 2, а від ділення на 5 має в остачі 3, нарешті від ділення на 7 — остача 2.

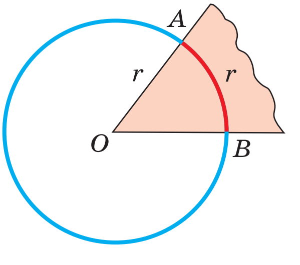
256. Побудуйте графік функції:

а) $y = 4x^{-2}$; б) $y = 4x^{-2} + 1$; в) $y = 6x^{-1}$; г) $y = 6x^{-1} - 2$.

§ 7. Тригонометричні функції числового аргументу

Досі ми розглядали тригонометричні функції кутів. При цьому вирази $x + \sin x$, $\cos x^2$ не мали змісту. Оскільки не можна до градусної міри кута додавати число, не має змісту й квадрат міри кута. А розв'язування багатьох задач приводить до аналізу подібних виразів. Тому математики часто мають справу з виразами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, де α — не міра кута, а абстрактне число. Що ж розуміють під синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом дійсного числа?

Спочатку згадаємо дещо про вимірювання кутів. Кути можна вимірювати *градусами* та їх меншими частками: *мінутами* і *секундами*. А ще можна вимірювати кути *радіанами*.



Мал. 57

Міра кута AOB дорівнює одному *радіану* (1 рад), якщо на колі із центром у вершині цього кута він вирізає дугу AB, довжина якої дорівнює довжині радіуса кола (мал. 57); 1 рад $\approx 57°$. Оскільки коло радіуса r має довжину $2\pi r$, то $360° = 2\pi$ рад. Звідси маємо:

$180° = \pi$ рад, $90° = \dfrac{\pi}{2}$ рад, $60° = \dfrac{\pi}{3}$ рад, $45° = \dfrac{\pi}{4}$ рад, $30° = \dfrac{\pi}{6}$ рад.

Градусна і радіанна міри кутів пов'язані такими залежностями:

$$\mathbf{1° = \frac{\pi}{180}\ \text{радіанів},\quad n° = \frac{\pi}{180}n\ \text{радіанів};}$$

$$\mathbf{1\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ},\quad \alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\cdot\alpha.}$$

Відповідність між деякими радіанними мірами кутів бажано пам'ятати:

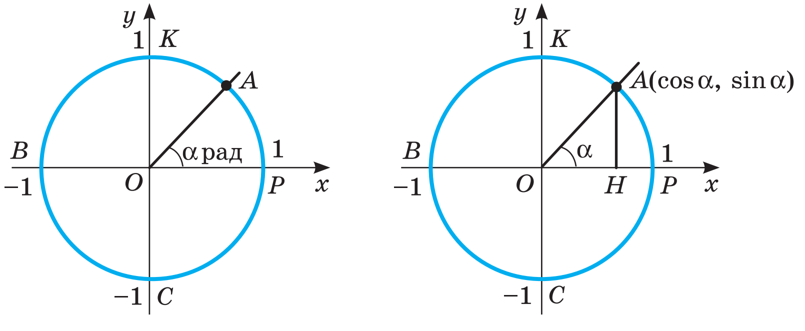
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°

Використовуючи формулу 1 рад $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, можна встановити відповідність між множиною дійсних чисел і множиною кутів повороту. А оскільки кожному значенню деякого кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$), то можна розглядати тригонометричні функції не лише кутового аргументу, а й числового.

!

Синусом числа α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає числу α. **Косинусом числа** α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає числу α (мал. 58, *б*).

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус *OP* (мал. 58, *а*). Кажуть, що точка *A* одиничного кола відповідає числу α, якщо кут *POA* дорівнює α радіанів. При цьому вважають, що кут α збільшується, якщо радіус *OA* рухається проти руху годинникової стрілки; кут α може бути як завгодно великим і як завгодно малим. Зображені на малюнку 58, *а* точки *P*, *K*, *B*, *C* відповідають числам 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$.



а *б*

Мал. 58

Синус і косинус числа α позначають відповідно: $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$. Зі зміною числа α змінюються також і значення $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$. Тому можна говорити про функції, задані рівностями $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

Розглянемо деякі властивості цих функцій.

Кожному дійсному числу x відповідає єдина точка одиничного кола, а їй — якась певна ордината й абсциса. Тому область визначення кожної із функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — уся множина R дійсних чисел.

Оскільки $\sin x$ — ордината, а $\cos x$ — абсциса деякої точки одиничного кола (його радіус дорівнює 1), то $-1 \le \sin x \le 1$ і $-1 \le \cos x \le 1$.

Якщо значення аргументу x збільшувати від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ збільшується від -1 до 1. При збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ значення $\sin x$ зменшується від 1 до -1. При подальшому збільшенні x усе повторюється. Як змінюється значення $\cos x$ зі збільшенням x, дослідіть самостійно.

Оскільки числу 2π відповідає повний оберт точки одиничного кола, то числам x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x + 2\pi n$, де n — ціле число, на одиничному колі відповідає одна й та сама точка. Синуси всіх цих чисел рівні. Тому для кожного цілого значення n:

$$\mathbf{\sin (x + 2\pi n) = \sin x.}$$

Так само

$$\mathbf{\cos (x + 2\pi n) = \cos x.}$$

> **!** Відношення синуса числа до косинуса того самого числа називають **тангенсом** цього числа, а обернене відношення — його **котангенсом**:
>
> $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Оскільки на 0 ділити не можна, то $\operatorname{tg} \alpha$ існує (має числове значення), коли $\cos \alpha \ne 0$, а $\operatorname{ctg} \alpha$ існує, коли $\sin \alpha \ne 0$. Зі зміною числа α значення $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ теж змінюються, тому $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ також функції від аргументу x.

Точні значення тригонометричних функцій при деяких значеннях аргументу (0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ і т. п.) можна визначати, користуючись одиничним колом. Вони наведені в таблиці 3 (с. 62).

> **!** Функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ називають **тригонометричними функціями** числового аргументу.

Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити, користуючись спеціальними таблицями або калькулятором. При цьому якщо значення аргументу x задано в градусах, то обирають позначку Г (DEG), якщо x — абстрактне число або кут у радіанах, — позначку Р (RAD). Наприклад, значення $\sin 1{,}2$ знаходять так:

[1] [,] [2] [sin]; результат 0,932039, тобто $\sin 1{,}2 \approx 0{,}932$.

Таблиця 3

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

! Вважають, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів.

Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівнозначне твердженню про тригонометричні функції кута α радіанів і навпаки. Зокрема, правильні формули

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Оскільки область визначення кожної тригонометричної функції симетрична відносно початку координат, то це означає, що функція $y = \cos x$ — парна, а функції $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$ — непарні.

Знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ такі, як і знаки координат точок одиничного кола, що відповідають куту α (див. мал. 49).

Символи $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ввів у математику Л. Ейлер.

Перевірте себе

1. Що називають радіаном? Скільки радіанів має прямий кут?
2. Що називають синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом числа? Як їх позначають?
3. Які знаки мають тригонометричні функції в різних чвертях?
4. Запишіть область визначення кожної з тригонометричних функцій.

Виконаємо разом

1) Користуючись одиничним колом, знайдіть значення тригонометричних функцій чисел: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

Розв'язання. Даним числам на одиничному колі відповідають точки: *P*, *K*, *B*, *C* (див. мал. 58, *а*, с. 60). Їх абсциси дорівнюють відповідно: 1, 0, –1, 0. Отже,

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = -1,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \cos 2\pi = 1.$$

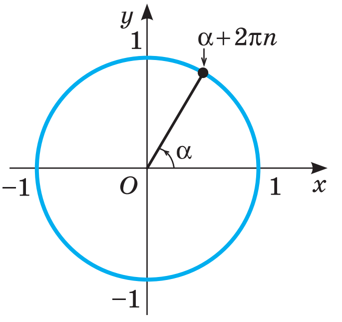
Ординати вказаних точок дорівнюють: 0, 1, 0, –1. Отже,

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ \sin 2\pi = 0;$$

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}\ \text{— не існує},\ \operatorname{tg}\pi = \frac{0}{-1} = 0\ \text{і т. д.}$$

2) Чи правильно, що при будь-якому цілому n і дійсному α: а) $\operatorname{tg}(2\pi n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}(2\pi n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$?

Розв'язання. Якщо n — число ціле, то числам α і $2\pi n + \alpha$ на одиничному колі відповідає одна й та сама точка (мал. 59). Тому кожна з наведених рівностей правильна.



Мал. 59

3) Обчисліть $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Відповідні значення синуса і косинуса знаходимо в таблиці 2 (с. 53). Маємо:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5.$$

Виконайте усно

257. Назвіть у радіанах міри кутів: а) квадрата; б) рівностороннього трикутника; в) прямокутного рівнобедреного трикутника; г) правильного шестикутника.

258. Назвіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює:

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi.$$

259. Які з чисел від'ємні: sin 2, sin 4, sin 5, cos 2, cos 3, cos 6? Відповідь аргументуйте.

260. Для яких значень x виконується рівність:
а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$; г) $\cos x = -1$?

261. Чи існують такі значення x, для яких $\cos x = 2{,}5$? А $\operatorname{tg} x = 2{,}5$?

А

Запишіть у радіанній мірі кути **(262, 263)**.

262. а) 15°; б) 30°; в) 45°; г) 60°; ґ) 90°; д) 135°; е) 180°; є) 270°.

263. а) $40°$; в) $105°$; ґ) $75°$; е) $100°$;
б) $120°$; г) $150°$; д) $32°$; є) $140°$.

Виразіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює даному числу **(264, 265)**.

264. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{18}$; в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}$; ґ) $\frac{5\pi}{6}$; д) 2π.

265. а) 2; б) 3; в) 1,5; г) 0,36; ґ) 5; д) 31,4.

266. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які (наближено) відповідають числам: 1, 2, 3, 4, –1, –2.

267. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам:
π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, 2π, 3π, 4π, $-\pi$, -2π, -3π.

268. Заповніть таблицю:

α	$0{,}5\pi$	π	$1{,}5\pi$	2π	$2{,}5\pi$	3π	$3{,}5\pi$
$\sin\alpha$							
$\cos\alpha$							
$\operatorname{tg}\alpha$							

269. Покажіть за допомогою малюнків кути:
а) $420°$; $540°$; $670°$; $730°$; $890°$;
б) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{5}$; $\frac{26\pi}{9}$.

270. Які знаки мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо α дорівнює:
а) $\frac{\pi}{5}$; б) $1{,}2\pi$; в) $\frac{7}{16}\pi$; г) $\frac{6}{17}\pi$; ґ) $\frac{16}{5}\pi$?

271. Визначте знак виразу:
а) $\sin 2\cdot\cos 3$; в) $\sin 4\cdot\operatorname{tg} 5$;
б) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\pi$; г) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 2\pi$.

272. Установіть відповідність між тригонометричними функціями деяких кутів (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\frac{\pi}{2}$ **А** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\cos\frac{\pi}{4}$ **Б** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$ **В** $\sqrt{3}$

Г 1

4 $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$ **Д** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

«Серед усіх наук, що відкривають шлях до пізнання природи, найвеличнішою є математика».
С. Ковалевська

273. Як змінюється $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо α збільшується від $0°$ до $2\pi°$? Заповніть порожні клітинки таблиці.

α	$\left(0°;\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$	$(\pi;\ 3\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right)$
$\sin\alpha$	$\nearrow$			
$\cos\alpha$		$\searrow$		

274. Збільшується чи зменшується значення $\operatorname{tg} x$ при збільшенні числа x від 0 до $\frac{\pi}{4}$? А при збільшенні x від $-\frac{\pi}{4}$ до 0?

275. Обчисліть за допомогою калькулятора:
а) $\sin 1{,}5$; б) $\sin 2{,}7$; в) $\cos 0{,}8$; г) $\operatorname{tg} 1{,}5$.

Обчисліть **(276–278)**.

276. а) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi$; в) $2\sin\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;
б) $\sin 2\pi\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\pi$; г) $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

277. а) $\sin 2{,}5\pi$; б) $\cos 3\pi$; в) $\cos\frac{7\pi}{3}$; г) $\sin\frac{17\pi}{4}$.

278. а) $\sin^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\pi$; в) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}$;
б) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}$.

279. Знайдіть значення виразу:
а) $\sin x\cdot\cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{6}$; б) $\sin x+\cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{4}$.

Б

280. Що більше: а) $\sin 1°$ чи $\sin 3°$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?

281. Які з чисел $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$:
а) менші за 1; б) більші за 2?

282. Які з чисел $\sin 2$; $\cos 2$; $\operatorname{tg} 2$; $\sin 3$; $\cos 3$ від'ємні?

283. Розмістіть у порядку зростання числа:
$\sin 0$; $\cos 0$; $\sin 1$; $\cos 1$; $\sin 2$; $\cos 2$; $\sin 3$; $\cos 3$.

284. Який знак має:
$\sin 3$; $\sin 3{,}1$; $\sin 3{,}5$; $\sin 7{,}2$; $\sin(-2)$; $\cos 7$?

285. Обчисліть за допомогою калькулятора (з точністю до тисячних):
$\sin 2$; $\operatorname{tg} 0{,}5$; $\cos 0{,}5$; $\sin 3{,}14$; $\sin\pi$; $\sin\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\sqrt{2}$.

286. Знайдіть значення виразу (з точністю до тисячних):

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\alpha = 2$; $\alpha = 0{,}3$; $\alpha = \sqrt{2}$;

б) $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\alpha = 1$; $\alpha = 2{,}7$; $\alpha = 13$;

в) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, якщо $\alpha = 0{,}7$; $\alpha = 12{,}5$; $\alpha = \sqrt{3}$.

Обчисліть значення виразу **(287–289)**.

287. а) $2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;   в) $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;   г) $\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{6}$.

288. а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;   в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - 1$;

б) $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\operatorname{tg}0 - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;   г) $1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

289. а) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;   в) $\sin 2{,}5\pi + \cos 2{,}5\pi$;

б) $\sin\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;   г) $\operatorname{tg} 4\pi + \sin 3\pi$.

Вправи для повторення

290. Швидкість одного літака на 100 км/год більша від швидкості другого. Тому перший долає відстань 980 км на 0,4 год довше, ніж другий — відстань 600 км. Знайдіть швидкості літаків.

291. Розв'яжіть нерівність:

а) $5(x + 2) - 2(x - 3) < 3(x - 1) - 4(x + 3)$;

б) $3(2x - 1) - 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x - 3)$.

292. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює: а) 5; б) 6; в) 7?

§ 8. Основні тригонометричні формули

Відомо багато тотожностей, які пов'язують різні тригонометричні функції. Розглянемо найважливіші з них — співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Пригадаємо рівняння кола.

Якщо x і y — абсциса й ордината якої-небудь точки одиничного кола, то $x^2 + y^2 = 1$ (мал. 60), $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ — абсциса й ордината деякої точки одиничного кола (див. мал. 58). Тому, яке не було б дійсне число α, завжди

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Це — *основна тригонометрична тотожність*. Приєднавши до неї ще формули, які випливають з означення тангенса і котангенса, дістанемо такі тотожності (за умови, що tg α і ctg α — існують):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad (1)$$

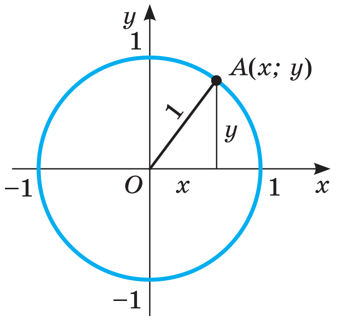
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$



Мал. 60

Формули (4) і (5) можна довести так:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Формула (6) доводиться аналогічно.

Користуючись цими формулами, можна числове значення будь-якої тригонометричної функції виразити через значення іншої тригонометричної функції такого самого аргументу. Але при цьому треба враховувати, якій чверті належить цей аргумент.

Приклади:

а) Знайдіть cos α і tg α, якщо sin α = 0,6 і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то cos α < 0. Оскільки sin α = 0,6 і $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}6^2} = -0{,}8$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$.

б) Знайдіть sin α, cos α і ctg α, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Відомо, що $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і α — кут третьої чверті, тому:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}} = -\frac{5}{13};$$

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{12}.$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте основну тригонометричну тотожність.
2. Які формули пов'язують синус, косинус і тангенс або котангенс того самого числа?
3. Як пов'язані тангенс і котангенс того самого числа?
4. Чи правильно, що тангенс і котангенс того самого числа — числа одного знака?

Виконаємо разом

1) Чи правильно, що при будь-якому значенні x: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$; $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$?

Розв'язання. Якщо $\pi < x < 2\pi$, то $\sin x < 0$. У цих випадках $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$. Якщо $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos x < 0$, і, отже, $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$. Тому наведені в задачі рівності правильні не завжди.

2) Спростіть вираз $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$.

Розв'язання. $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0.$

3) Обчисліть $\sin^2 3 + \operatorname{ctg}^2 3 \cdot \sin^2 3$.

Розв'язання. $\sin^2 3 + \operatorname{ctg}^2 3 \cdot \sin^2 3 = \sin^2 3 + \frac{\cos^2 3}{\sin^2 3} \cdot \sin^2 3 = \sin^2 3 + \cos^2 3 = 1.$

Виконайте усно

Спростіть вираз **(293–295)**.

293. а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; г) $5\cos^2\beta - 5$; ґ) $7\sin^2\beta - 7$; д) $\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\beta$.

294. а) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$; б) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; в) $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$.

295. а) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$; б) $-\sin^2 x - \sin^2 x$; в) $\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha$; г) $1 - \sin^2 c - \cos^2 c$.

А

Доведіть тотожність **(296, 297)**.

296. а) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$.

297. а) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$; б) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Спростіть вираз **(298, 299)**.

298. а) $1-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$;
б) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;
в) $2-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;
г) $(\cos x-1)(2+2\cos x)$;
ґ) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
д) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$.

299. а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-1}$;
в) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg}x$;
г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$;
ґ) $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$;
д) $\dfrac{\sin^4\beta-\sin^6\beta}{\cos^4\beta-\cos^6\beta}$.

300. Відомо, що кут α гострий. Обчисліть значення:
а) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$;
б) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$;
в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=4$.

301. Знаючи, що $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, обчисліть значення $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що:
а) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;
б) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

302. Знаючи, що $\cos\alpha=0{,}8$, обчисліть значення $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що:
а) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;
б) $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

303. Спростіть вираз:
а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
б) $1-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;
в) $1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;
г) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;
ґ) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$;
д) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

304. Доведіть тотожність:
а) $(1-\sin^2\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha$;
б) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
в) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$;
г) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

305. Доведіть тотожність:
а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;
б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;
в) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;
г) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{tg}\beta-1}=-\operatorname{ctg}\beta$.

Б

Доведіть тотожність **(306, 307)**.

306. а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$;
б) $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

307. а) $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;
б) $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1$.

308. а) $\dfrac{2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha+3}{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha+3}=\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $1+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Спростіть вираз **(309–311)**.

309. а) $1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$; в) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;
б) $1-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $(\operatorname{tg}\beta\cos\beta)^2+(\operatorname{ctg}\beta\sin\beta)^2$.

310. а) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha$; в) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
б) $1-\sin\beta\cos\beta\operatorname{tg}\beta$; г) $(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$.

311. а) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; в) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;
б) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$.

312. Знайдіть значення:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$ і $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

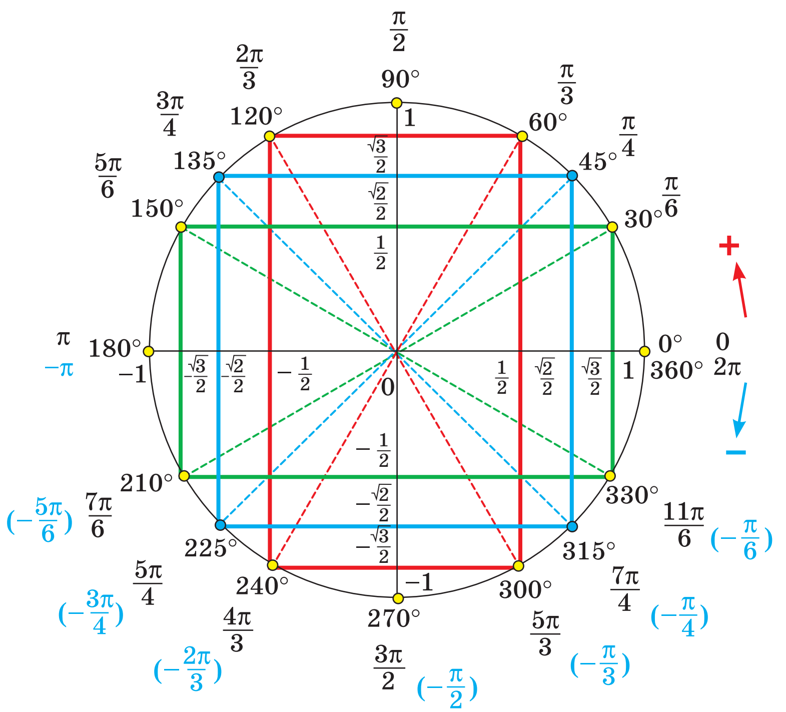
б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$ і $180^\circ<\alpha<270^\circ$;

в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-1$ і $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

313. **Практичне завдання.** Розгляньте одиничне коло (мал. 61) і координати точок, зображених на ньому. Визначте:

а) синуси кутів 30° і $180^\circ-30^\circ$; $180^\circ+30^\circ$ і $360^\circ-30^\circ$. Зробіть висновок.

б) косинуси кутів $\pi-\dfrac{\pi}{3}$ і $\pi+\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{3}$ і $\pi+\dfrac{\pi}{3}$. Зробіть висновок.



Мал. 61

Складіть і розв'яжіть аналогічну задачу про тригонометричні функції кутів $90° \mp 30°$ та $270° \mp 30°$ $\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3}$ та $\frac{3\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3}\right)$. Сформулюйте гіпотезу.

Вправи для повторення

314. Побудуйте графік функції $y = 4 - x^2$. При яких значеннях вона зростає, а при яких спадає? Знайдіть її нулі і найбільше значення.

315. Вартість обладнання — A (грошових одиниць), а вартість його капітального ремонту — r (грошових одиниць). До капітального ремонту обладнання працює n років, а з ремонтом — m років. Відомо, що капітальний ремонт є рентабельним, якщо $r < \frac{A}{n(m-n)}$. Визначте, у якому випадку капітальний ремонт обладнання буде рентабельним:

а) A = 1200 гр. од., r = 300 гр. од., n = 3 роки; m = 4 роки;
б) A = 2100 гр. од., r = 800 гр. од., n = 6 років; m = 104 роки;
в) A = 3500 гр. од., r = 2000 гр. од., n = 12 років; m = 20 років;
г) A = 6000 гр. од., r = 2500 гр. од., n = 10 років; m = 20 років.

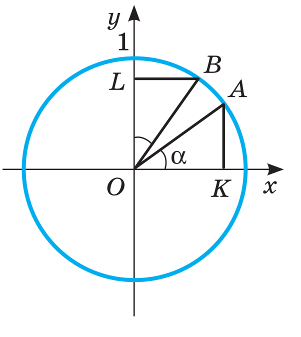
316. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+1}{6} - \frac{2x}{9} = 5;$ б) $\frac{x-2}{3} - \frac{5x+1}{4} = \frac{11x}{2}.$

§ 9. Формули зведення

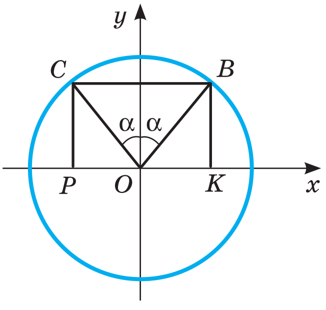
Кожну тригонометричну функцію кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ можна виразити через тригонометричну функцію кута α. Покажемо це спочатку для синусів і косинусів.

Нехай α — довільний кут, виражений у радіанах. На одиничному колі йому відповідає певна точка A, а куту $\frac{\pi}{2} - \alpha$ — точка B (мал. 62). Опустивши перпендикуляри: AK — на вісь x, BL — на вісь y, дістанемо два рівних трикутники AOK і BOL (оскільки $\angle AOK = \angle BOL$ і $OA = OB$). Тому $OL = OK$ і $BL = AK$, тобто $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OL = OK = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BL = AK = \sin\alpha$.

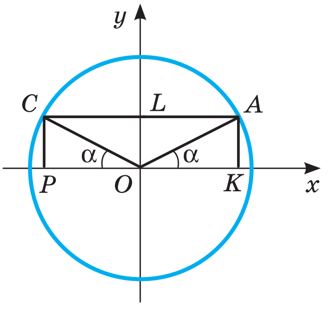


Мал. 62

Кутам $\frac{\pi}{2}+\alpha$ і $\frac{\pi}{2}-\alpha$ на одиничному колі відповідають точки, симетричні відносно осі y (мал. 63). Їх ординати рівні, абсциси протилежні. Тому



Мал. 63



Мал. 64

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Кутам $\pi-\alpha$ і α також відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі y (мал. 64). Тому $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

Кутам $\pi+\alpha$ і α (а також $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ і $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ і $\frac{\pi}{2}+\alpha$) відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно початку координат (мал. 65). Їх ординати протилежні й абсциси також протилежні. Тому

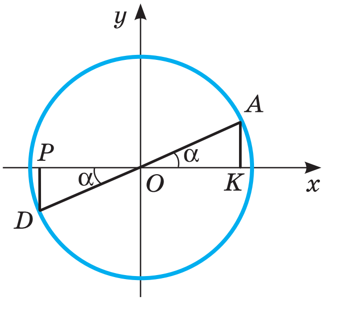
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

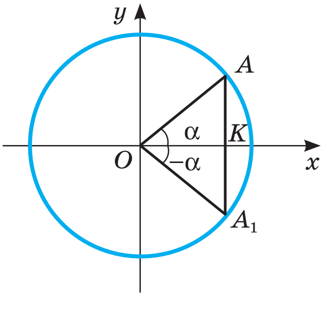
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$



Мал. 65

Кутам $2\pi-\alpha$ і α відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі x (мал. 66). Їх абсциси рівні, а ординати протилежні. Тому

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$



Мал. 66

Кутам $2\pi+\alpha$ і α відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$.

З попередніх міркувань маємо 16 формул.

Ще 16 подібних формул можна довести для тангенса і котангенса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right):\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha:\sin\alpha=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right):\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha:\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\text{Отже, } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Усі ці 32 формули називають *формулами зведення*, оскільки вони дають можливість кожну тригонометричну функцію довільного кута (а отже, і числа) звести до тригонометричної функції гострого кута. Запам'ятовувати кожну з цих формул немає потреби, краще користуватися загальним правилом.

!

Правило зведення: якщо кут даної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж — від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють.

Знак ставлять такий, який має значення даної функції за умови, що кут α гострий.

Щоб зрозуміліше сформулювати правило, домовимося синус вважати *кофункцією* косинуса, і навпаки, а тангенс — *кофункцією* котангенса, і навпаки.

Говоритимемо також, що кут зводжуваної функції відкладається від горизонтального діаметра, якщо він має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, чи від вертикального діаметра, якщо він має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

Приклад. Нехай треба спростити вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$. Перед результатом треба поставити знак «мінус», оскільки коли кут α гострий, то кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ належить III чверті і його косинус від'ємний. Кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ відкладається від вертикального діаметра, тому назву функції косинус (cos) треба замінити на синус (sin). Отже,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Зауваження. Користуючись правилом зведення, ми тільки для зручності приймаємо, що кут α гострий. Насправді ж у кожній із формул зведення під змінною α можна розуміти й міру довільного кута, зокрема й від'ємного, і будь-яке дійсне число.

Перевірте себе

1. Що називають формулами зведення?
2. Сформулюйте правило зведення.
3. Які знаки мають тригонометричні функції в кожній із чвертей?
4. Яку функцію називають кофункцією для синуса? А тангенса?
5. Чи може у формулі зведення α дорівнювати $-1,5$? А $120°$?

Виконаємо разом

1) Доведіть тотожність:

а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

Розв'язання. а) За формулами зведення $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Отже, тотожність правильна.

б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha-\pi+2\pi)=\sin(\alpha+\pi)$

або $\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ і $\sin(\alpha+\pi)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

2) Дану тригонометричну функцію зведіть до найменшого додатного аргументу: а) $\sin 845°$; б) $\cos 212°$.

Розв'язання.

а) $\sin 845°=\sin(360°\cdot 2+125°)=\sin 125°=\sin(90°+35°)=\cos 35°$;

б) $\cos 212°=\cos(180°+32°)=-\cos 32°$;

в) $\sin 1{,}75\pi=\sin(1{,}5\pi+0{,}25\pi)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$.

Виконайте усно

317. Які функції мають бути в порожніх клітинках таблиці?

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$	$\sin(\pi+\alpha)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

318. Зведіть до найменшого додатного аргументу функції:

а) $\sin 94°$; в) $\operatorname{tg} 192°$; ґ) $\operatorname{ctg} 179°$;
б) $\cos 105°$; г) $\cos 269°$; д) $\sin 282°$.

Спростіть вираз **(319, 320)**.

319. а) $\sin(90°+\alpha)$; в) $\sin(\alpha+90°)$; ґ) $\operatorname{ctg}(90°+\alpha)$;
б) $\cos(90°+\alpha)$; г) $\operatorname{tg}(90°+\alpha)$; д) $\operatorname{tg}(\alpha+180°)$.

320. а) $\sin(180°-\alpha)$; в) $\cos(\alpha+90°)$; ґ) $\operatorname{ctg}(180°-\alpha)$;
б) $\cos(180°-\alpha)$; г) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)$; д) $\operatorname{ctg}(\alpha+270°)$.

321. Доведіть тотожність:

а) $\sin^2 x+\sin^2(90°+x)=1$; б) $\cos^2(90°-x)+\sin^2 x=1$.

А

Спростіть вираз **(322–326)**.

322. а) $\sin(270°-\alpha)$; в) $\cos(360°+\alpha)$; ґ) $\sin(360°-\alpha)$;
б) $\cos(270°-\alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$; д) $\operatorname{tg}(360°-\alpha)$.

323. а) $\sin(90°-2\alpha)$; в) $\operatorname{tg}(180°-2x)$; ґ) $\cos(270°+\alpha)$;
б) $\cos(90°+3\alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(180°+3x)$. д) $\operatorname{tg}(270°-\alpha)$.

324. а) $\sin\left(90°+\dfrac{\alpha}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(90°+\dfrac{\alpha}{3}\right)$; ґ) $\sin\left(270+\dfrac{\alpha}{4}\right)$;

б) $\cos\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(270°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; д) $\cos\left(270-\dfrac{3\alpha}{2}\right)$.

325. а) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$; ґ) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\sin(\alpha+\pi)$; г) $\sin(\pi-\alpha)$; д) $\sin(2\pi-\alpha)$.

326. а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; ґ) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(3\pi-\alpha)$; д) $\cos(\alpha+5\pi)$.

Спростіть вираз **(327–331).**

327. а) $\sin^2(\pi+\alpha)$; б) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

328. а) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos^2(\pi-\alpha)$.

329. а) $\sin(\pi-x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$; б) $\cos(\pi+x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$.

330. а) $\sin(-\alpha)+\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}(-\alpha)-\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\cos\alpha+\cos(-\alpha)$; г) $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}(-x)$.

331. а) $\sin(\alpha-\beta):\sin(\beta-\alpha)$; в) $\operatorname{tg}(1-\alpha):\operatorname{tg}(\alpha-1)$;

б) $\cos(x-\alpha):\cos(\alpha-x)$; г) $\operatorname{ctg}(1-2x):\operatorname{ctg}(2x-1)$.

Знайдіть значення виразу **(332–334).**

332. а) $\sin 300°$; б) $\cos 240°$; в) $\operatorname{tg} 225°$; г) $\operatorname{ctg} 330°$.

333. а) $\sin(-210°)$; б) $\cos(-225°)$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\operatorname{ctg}(-315°)$.

334. а) $\sin 405°$; б) $\cos 720°$; в) $\operatorname{tg} 750°$; г) $\operatorname{ctg} 1110°$.

Б

Спростіть вираз **(335, 336).**

335. а) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}(\varphi-\pi)$.

336. а) $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $\cos\left(\pi-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$; ґ) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\cos(3\alpha-\pi)$; г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$; д) $\sin(\alpha-3\pi)$.

Знайдіть значення виразу **(337–340).**

337. а) $\cos 810°$; б) $\sin(-1470°)$; в) $\operatorname{tg} 1125°$; г) $\operatorname{tg} 1830°$.

338. а) $\operatorname{ctg} 1500°$; б) $\cos(-945°)$; в) $\cos 3660°$; г) $\sin 1620°$.

339. а) $\cos 450°$; в) $\cos 945°$; ґ) $\sin 585°$; е) $\operatorname{tg}(-9405°)$;
б) $\sin(-4095°)$; г) $\operatorname{tg} 1215°$; д) $\cos 750°$; є) $\sin 1140°$.

340. а) $\sin 3{,}5\pi$; б) $\cos 2{,}5\pi$; в) $\operatorname{tg}\pi$; г) $\operatorname{ctg} 1{,}75\pi$.

Зведіть функцію до найменшого додатного аргументу **(341, 342).**

341. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

342. а) $\sin(3\pi+2)$; б) $\cos(5\pi-3)$; в) $\operatorname{tg}(0{,}5\pi+1)$; г) $\operatorname{ctg}(\pi-4)$.

Спростіть вираз **(343–345).**

343. а) $1-\sin^2(\pi+\alpha)$; в) $1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

344. а) $\sin^2(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; в) $\operatorname{ctg}^2(2\pi-x)+\sin^2\frac{5\pi}{2}$;

б) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; г) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2 7\pi$.

345. а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin(1{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}(1{,}5\pi+\alpha)}$; б) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\alpha-0{,}5\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+0{,}5\pi)}$.

346. Установіть відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д), якщо $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1 $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
2 $\cos(360°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(360°-\alpha)$
3 $\sin(90°-\alpha)\cdot\cos(180°+\alpha)$
4 $\operatorname{tg}(3\pi+2\alpha)\cdot\cos(\pi+2\alpha)$

А $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Б $\sqrt{3}$
В $-0{,}5$
Г 1
Д $-0{,}75$

Доведіть тотожність **(347, 348).**

347. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

348. а) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

349. Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то:

а) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

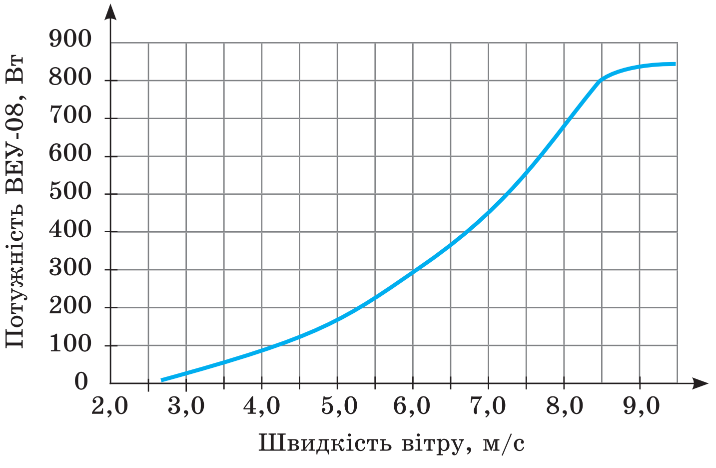
350. **Практичне завдання.** Скористайтеся правилом на с. 73 і заповніть порожні клітинки таблиці. Виконання цього практичного завдання надасть вам упевненості під час розв'язування складніших вправ.

Функ-ція	**Аргумент**							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$				$-\sin\alpha$				
$\cos t$							$\cos\alpha$	
$\mathrm{tg}\, t$			$-\mathrm{tg}\,\alpha$					
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$							

Вправи для повторення

351. Які з функцій $y = x^2$, $y = -x$, $y = 0{,}5x^3$, $y = 2x^2 + 3$, $y=\sqrt{x}$ парні, які — непарні?

352. На малюнку 67 зображено графік залежності потужності одного з вітрогенераторів від швидкості вітру. Зростаючою чи спадною є ця функція? Знайдіть: а) потужність вітрогенератора, якщо швидкість вітру дорівнює 4 м/с; 8 м/с; б) швидкість вітру, при якому потужність вітрогенератора дорівнює 200 Вт; 700 Вт.



Мал. 67

353. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3x}{4}+\frac{2(x-1)}{5}=\frac{111}{10}$; б) $\frac{2x+3}{5}+\frac{15-3x}{3}=\frac{4}{5}$.

§ 10. Властивості та графіки тригонометричних функцій

Одна з найважливіших властивостей тригонометричних функцій полягає в тому, що кожна з них — функція періодична.

!

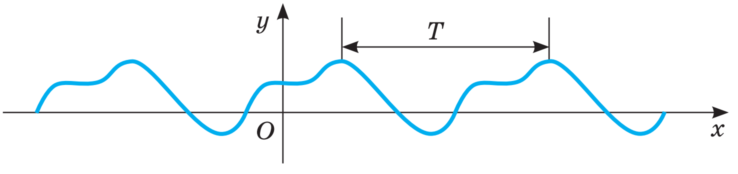
Функцію $y = f(x)$ називають **періодичною,** якщо існує таке дійсне число $T \neq 0$, що для всіх значень x з області її визначення

$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Число T називають **періодом** даної функції.

Якщо T — період деякої функції, то nT, де $n \in N$ і $n \neq 0$, також її період.

Графік періодичної функції паралельним перенесенням уздовж осі x на T, $2T$, ..., nT одиниць вліво чи вправо відображається на себе (мал. 68).



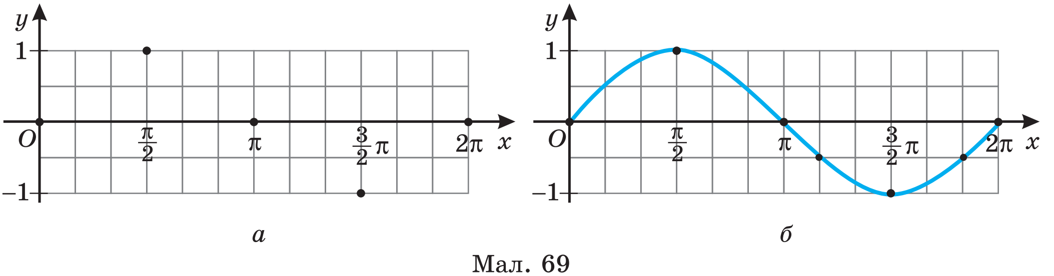
Мал. 68

Розглянемо спочатку конкретний приклад.

Функція $y = \sin x$. Синус числа x — ордината точки одиничного кола, яка відповідає числу x (див. § 7). Оскільки кожному дійсному числу x відповідає єдине значення $\sin x$, то $y = \sin x$ — функція, визначена на множині всіх дійсних чисел R. Щоб виявити найважливіші властивості цієї функції, побудуємо її графік. Спочатку — тільки на проміжку $[0; 2\pi]$.

Складемо таблицю значень.

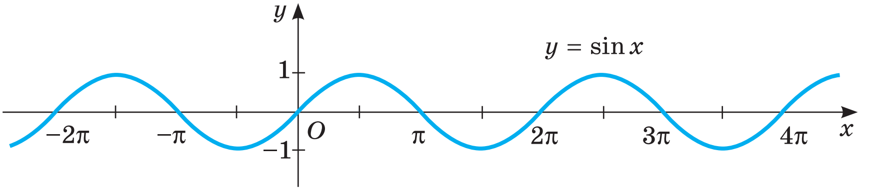
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0



Мал. 69

Точки з відповідними координатами нанесемо на координатну площину (мал. 69, *а*). Якщо обчислити значення $\sin x$ для всіх дійсних значень x і позначити на координатній площині всі відповідні їм точки, то дістанемо криву, зображену на малюнку 69, *б*. Це — графік функції $y = \sin x$ на $[0; 2\pi]$.

На побудованому графіку показано, як змінюється ордината точки одиничного кола, здійснюючи один повний обхід цього кола. На другому, третьому і наступних обходах усе повторюється. Це випливає також із тотожності $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$. Тому якщо криву, зображену на малюнку 69, *б*, перенести на кожний з проміжків $[2\pi n; 2(n + 1)\pi]$, де n — числа цілі, дістанемо весь графік (мал. 70).



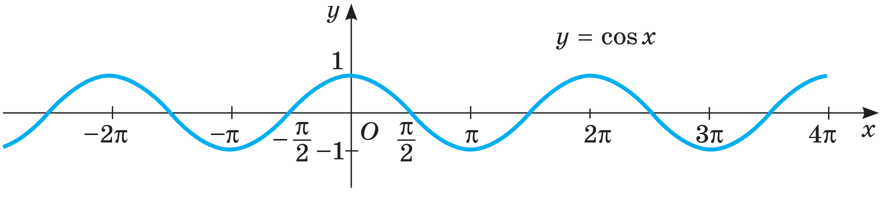
Мал. 70

Функція $y = \sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π. Це видно на графіку функції (мал. 70). Можна міркувати й інакше. Оскільки завжди $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, то 2π — період функції $y = \sin x$. А коли ця функція мала б додатний період $l < 2\pi$, тоді правильною була б рівність $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right)$. А за умови, що $0 < l < 2\pi$, ця рівність неправильна (переконайтесь у цьому за допомогою одиничного кола). Отже, найменший додатний період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π.

Графік функції $y = \sin x$ — *синусоїда* (мал. 70); вона нескінченна в обидва боки.

Матеріальну модель синусоїди зможете побачити, якщо виконаєте практичне завдання на с. 85.

Оскільки для кожного значення x правильна рівність $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то графік функції $y = \cos x$ — така сама синусоїда, тільки зміщена вздовж осі x на $\frac{\pi}{2}$ одиниць уліво (мал. 71).



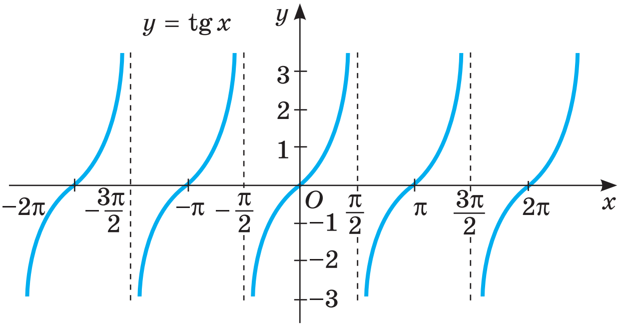
Мал. 71

Зазначимо основні властивості тригонометричних функцій.

Функція $y = \sin x$. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел R, а область значень — відрізок $[-1; 1]$. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції зображено на малюнку 70.

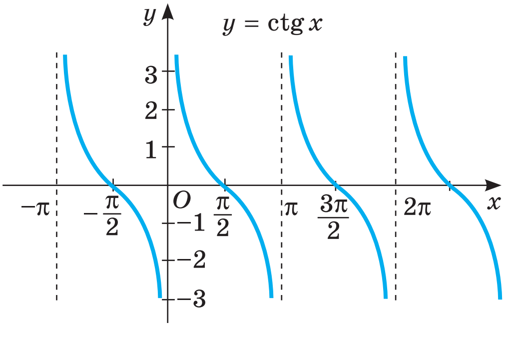
Функція $y = \cos x$. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел R, область значень — відрізок $[-1; 1]$. Функція парна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції $y = \cos x$ зображено на малюнку 71.

Функція $y = \mathrm{tg}\, x$. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел, за винятком значень $x = \frac{\pi}{2}(n+1)$, де $n \in Z$, область значень — множина R. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює π. Графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ складається з безлічі рівних між собою нескінченних і центрально-симетричних ліній (мал. 72). Графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ називають *тангенсоїдою*.



Мал. 72

Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел, за винятком значень $x = \pi n$, де $n \in Z$, область значень — множина R. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює π. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ складається з безлічі рівних між собою нескінченних і центрально-симетричних ліній (мал. 73).



Мал. 73

Інші властивості тригонометричних функцій (нулі, проміжки знакосталості, зростання і спадання) можна прочитати за відповідними графіками. Спробуйте це зробити самостійно.

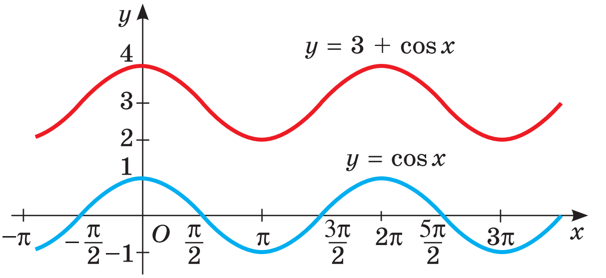
Для порівняння всі властивості тригонометричних функцій зведено в одну таблицю (всюди $k \in Z$). Із часом ви навчитеся визначати їх аналітично.

Таблиця 4

$f(x)$	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{ctg}\, x$
$D(y)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x \neq \pi k$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
	непарна	парна	непарна	непарна
T	2π	2π	π	π
$y = 0$	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
$y > 0$	$(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
$y < 0$	$(-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$
$y\uparrow$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$(-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	—
$y\downarrow$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$	—	$(\pi k;\ \pi + \pi k)$

Знаючи, який вигляд має, наприклад, графік функції $y = \cos x$, можна побудувати графік функції $y = 3 + \cos x$ (мал. 74).

А дивлячись на графік, можна вказати й основні властивості функції $y = 3 + \cos x$. Її область визначення — множина R, область значень — відрізок $[2; 4]$. Функція парна, періодична з найменшим додатним періодом 2π.



Мал. 74

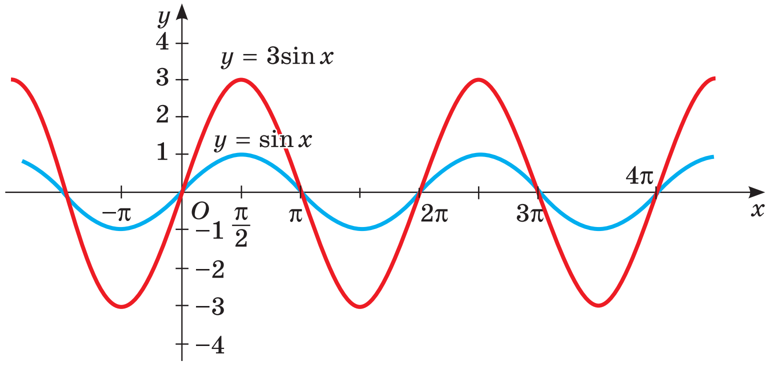
Перевірте себе

1. Яку функцію називають періодичною?
2. Назвіть область визначення і множину значень кожної з тригонометричних функцій.
3. Назвіть основний період кожної з тригонометричних функцій.
4. Чи мають нулі тригонометричні функції?
5. Як називають графіки основних тригонометричних функцій?

Виконаємо разом

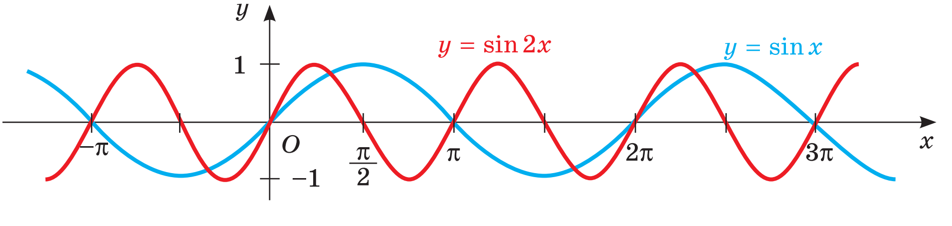
1) Побудуйте графік функції:
а) $y = 3\sin x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin (x + 2)$.

Розв'язання. а) Щоб побудувати графік функції $y = 3\sin x$ (див. с. 10), треба графік функції $y = \sin x$ розтягнути від осі x у 3 рази (мал. 75). Чому?



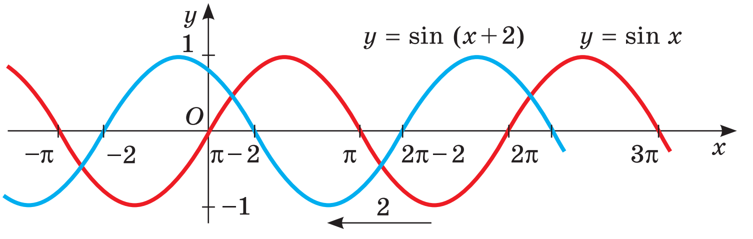
Мал. 75

б) Щоб побудувати графік функції $y = \sin 2x$ (див. с. 12), треба графік функції $y = \sin x$ стиснути до осі y удвічі (мал. 76).



Мал. 76

в) Щоб побудувати графік функції $y = \sin (x + 2)$, треба графік функції $y = \sin x$ перенести на 2 одиниці вліво (мал. 77).



Мал. 77

Так само можна перетворювати й інші графіки тригонометричних функцій. Поясніть ці перетворення самостійно.

Виконайте усно

354. Поясніть, як змінюється значення функції $y = \sin x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π.

355. Як змінюється значення функції $y = \cos x$ і $y = \operatorname{tg} x$ при збільшенні їх аргументу x від 0 до 2π?

356. Чи можна вважати парною функцію $y = \cos x$, задану на множині $(0; +\infty)$? А на множині $[-\pi; \pi]$?

357. Чи можна вважати непарною функцію $y = \sin x$, задану на множині $[-2\pi; 2\pi]$? А на множині $[0; +\infty)$?

358. Яка з функцій є періодичною:
а) $y = \cos(x - 1)$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = 2\operatorname{tg} x$; г) $y = 2 - \sin x$?

А

Побудуйте графік і, дивлячись на нього, опишіть основні властивості функцій **(359–363)**.

359. а) $y = \sin x,\ x \in [-\pi; \pi]$; б) $y = \cos x,\ x \in [-\pi; 3\pi]$.

360. а) $y = 1 + \cos x,\ x \in [0; 2\pi]$; б) $y = \sin x - 2,\ x \in [-2\pi; 2\pi]$.

361. а) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (0; 2\pi)$; б) $y = -1 + \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi; \pi)$.

362. а) $y = 4\sin x$ на $[-\pi; \pi]$; б) $y = \operatorname{tg} x + 1,\ x \in (-\pi; \pi)$.

363. а) $y = -0{,}5\cos x$ на $[-\pi; \pi]$; б) $y = 2\operatorname{ctg} x - 1,\ x \in (0; 2\pi)$.

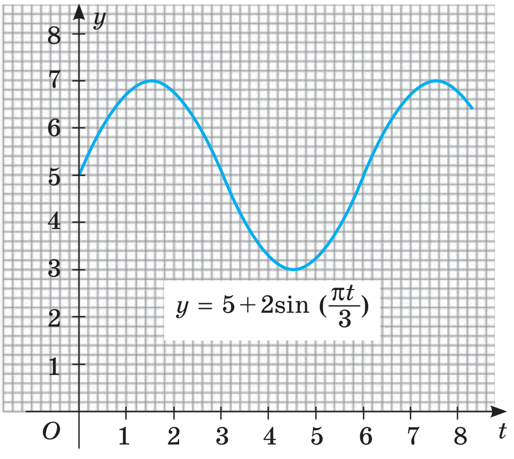
Знайдіть область визначення функції **(364, 365)**.

364. а) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{tg} 3x$; в) $y = \cos 3x$.

365. а) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; б) $y = \cos(2x + 3)$; в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

366. Еколог, що вивчає популяцію жуків плавунців протягом 8 тижнів, змоделював зміну їх кількості за допомогою функції $K(t) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де t — кількість тижнів дослідження, $0 \le t \le 8$, а $K(t)$ — кількість жуків плавунців у тисячах. На малюнку 78 побудовано графік цієї функції. Встановіть:

а) чисельність популяції на початку дослідження;
б) чи зменшувалася кількість популяції жуків плавунців до 2000;
в) найбільшу і найменшу чисельність популяції за час дослідження.



Мал. 78

Знайдіть область значень функції **(367, 368).**

367. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$; в) $y = -2\cos(x - 1)$.

368. а) $y = -\sqrt{3}\cos x$; б) $y = -17\operatorname{tg} x$; в) $y = \sin x - 1$.

Б

369. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin(\pi - x)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; в) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

370. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin\frac{x}{2}$ з віссю x.

371. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \cos 2x$ і $y = 0{,}5$.

372. Парною чи непарною є функція:

а) $y = \sin 2x$; в) $y = -\operatorname{tg} x$; ґ) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

б) $y = 3\cos x$; г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; д) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$?

373. Як можна побудувати графік функції:

а) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$; в) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

б) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; г) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

Побудуйте графік і визначте основні властивості функцій **(374–379)**.

374. а) $y = 3 + \sin x$; б) $y = 2 + \cos x$; в) $y = 3 + \operatorname{tg} x$.

375. а) $y = -\sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = -\operatorname{tg} x$.

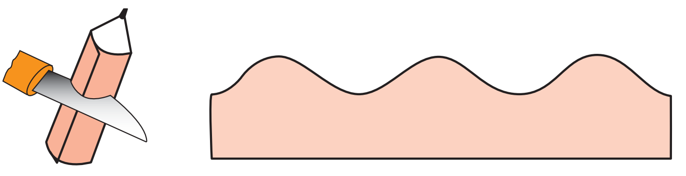
376. а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$; в) $y = 1 - \operatorname{tg} x$.

377. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = 0{,}5\operatorname{tg} x$.

378. а) $y=|\sin x|$; б) $y=|\cos x|$; в) $y=|\operatorname{tg} x|$.

379. а) $y=\sin|x|$; б) $y=\cos|x|$; в) $y=\operatorname{tg}|x|$.

380. **Практичне завдання.** Розглянемо одну матеріальну модель синусоїди. Якщо обгорнути свічку кілька разів папером, потім перерізати її гострим ножем під кутом 45° до осі свічки (мал. 79) і розгорнути папір, матимемо матеріальну модель частини синусоїди. Спробуйте виготовити таку модель синусоїди, обгорнувши кольоровим папером свічку чи циліндр, виготовлений із пластиліну.



Мал. 79

381. **Практичне завдання.** Розгляньте пари функцій:

а) $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ і $y = \sin x$;

б) $y=|1+\cos x|$ і $y = 1 + \cos x$.

Що можна сказати про графіки функцій у кожному з випадків *а* і *б*. Сформулюйте гіпотезу. Перевірте її, побудувавши пари вказаних графіків за допомогою ППЗ. Спробуйте довести цю гіпотезу, використовуючи властивості функцій.

Вправи для повторення

382. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2-7|x|=0$; б) $x^2-3|x|-x=0$.

383. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x}$; б) $\dfrac{6a^2+15ab-8ac-2bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}$.

384. Заробітна плата токаря становила 5000 грн. Спочатку її було збільшено на 10 %, а потім через рік — ще на 20 %. На скільки відсотків збільшилася заробітна плата токаря порівняно з початковою?

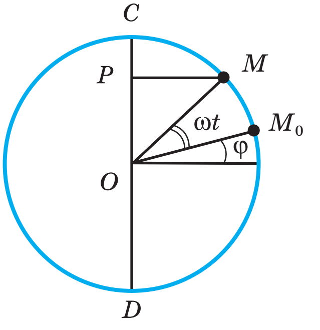
§ 11. Періодичні функції і гармонічні коливання*

Кожному добре відомі явища, що чергуються: ранок, день, вечір, ніч, ранок, день...; весна, літо, осінь, зима, весна, літо...

І маятник годинника коливається так, і струна, і значення змінного струму, і багато механізмів працюючої машини змінюють своє положення періодично і плавно. Математичне моделювання таких явищ і процесів зручно здійснювати за допомогою формули гармонічного коливання.

Коливання — ритмічні переміщення чого-небудь з одного боку в інший, зміна значень величини тощо. Можна говорити про коливання маятника, коливання температури повітря, коливання цін тощо. Коливання бувають різними, зокрема вільними, вимушеними, затухаючими (наведіть відомі вам приклади з фізики). Особливо цікаві *гармонічні коливання* — періодичні, здійснювані за законом синуса чи косинуса. Коротше їх називають *гармоніками*.

Як змінюватиметься значення функції $y = \sin x$, якщо значення аргументу x рівномірно збільшувати? Від такої зміни значення y гармонійно коливатиметься (на осі y) у межах від -1 до 1. Це — найпростіший приклад гармонічного коливання з амплітудою 1. Приклад гармонічного коливання з амплітудою A, здійснюваного залежно від зміни часу t, дає формула $y = A\sin t$.



Мал. 80

Розглянемо загальний випадок. Нехай точка M рухається по колу радіуса A в додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (мал. 80). Якщо в початковий момент часу (тобто коли $t = 0$) точка M займала положення M_0, яке визначається кутом φ, то через t секунд вона займе деяке положення M, яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Ордината точки M дорівнює $A\sin(\omega t + \varphi)$.

> **!** **Період** T гармонічного коливання — це найменший додатний період функції $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, тобто час, протягом якого точка M здійснює один повний оберт по колу. За цей час точка M проходить ωT радіанів, або 2π радіанів.

Формула $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ визначає змінну y як функцію часу t. Це і є формула гармонічного коливання. У ній y — значення функції, t — аргумент, а числа A, ω і φ — сталі: A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза, ω — кутова швидкість, $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза і початкова фаза — у радіанах.

Амплітуда — це величина найбільшого відхилення від положення рівноваги.

* Для допитливих.

Якщо $\omega > 0$, то $\omega T = 2\pi$, звідси $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Період гармонічного коливання визначається в секундах; він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання; не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання. Приклади простіших графіків гармонічних коливань — на малюнках 76–78.

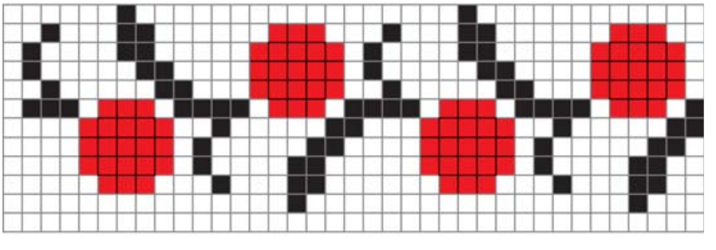
Графік гармонічного коливання $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A, ω і φ — дані числа, будують у такій послідовності:

- спочатку будують графік функції $y = \sin x$;
- стисненням до осі y у відношенні $1 : \dfrac{1}{\omega}$ дістають графік функції $y = \sin \omega x$;
- із цього графіка за допомогою паралельного перенесення на відстань $\dfrac{|\varphi|}{\omega}$ вправо при $\varphi < 0$ і вліво при $\varphi > 0$ дістають графік функції $y = \sin(\omega x + \varphi)$;
- нарешті, із графіка цієї функції розтягом від осі x в A разів ($A > 1$) або стисненням до осі x у відношенні $\dfrac{1}{A}$ ($0 < A < 1$) дістають графік заданої функції $y = A\sin(\omega t + \varphi)$.

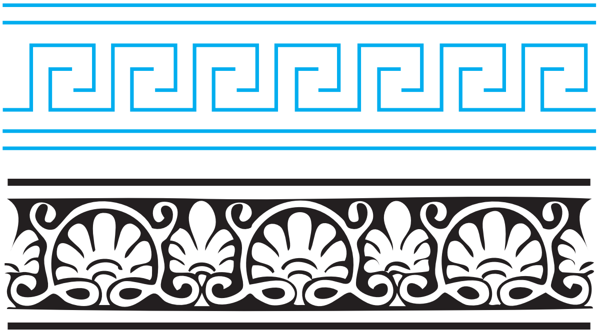
Існують періодичні функції, відмінні від гармонічних коливань. Такою є, наприклад, функція $y = \mathrm{tg}\, x$ (мал. 72). Узагалі, періодичними є всі функції виду $A\sin(\omega x + \varphi)$, $A\cos(\omega x + \varphi)$, $A\,\mathrm{tg}(\omega x + \varphi)$, $A\,\mathrm{ctg}(\omega x + \varphi)$ та багато інших.

Період перших двох функцій знаходиться за формулою $T_1 = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$, а двох інших — $T_2 = \dfrac{\pi}{|\omega|}$.

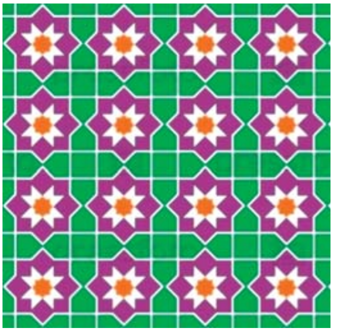
Періодичною є також функція, графік якої — кардіограма здорової людини (див. мал. 4). Періодичними бувають не тільки функції та їхні графіки, а й багато інших зображень: вишивки, орнаменти, візерунки на тканинах чи шпалерах тощо (мал. 81). Такими є, зокрема, давньогрецькі орнаменти *меандр* і *акант* (мал. 82, 83), візерунки на огорожах тощо. Усе це — приклади стрічкових орнаментів, періодичних в одному напрямі. А є також площинні орнаменти, періодичні в багатьох різних напрямах.



Мал. 81

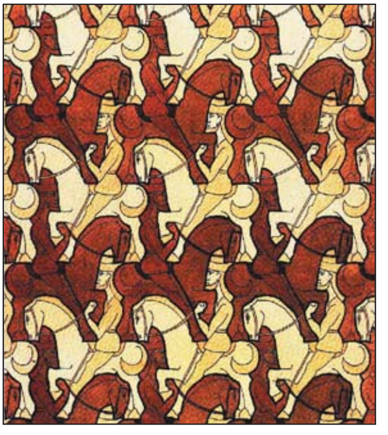


Мал. 82



Мал. 83

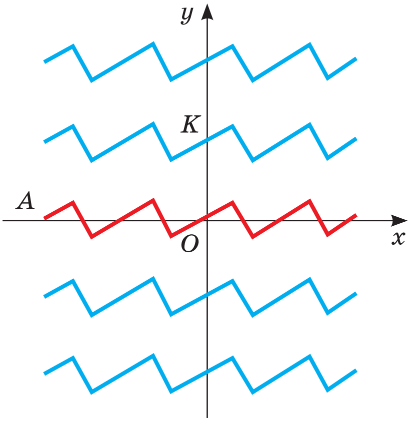
Подібні площинні орнаменти особливо поширені в країнах ісламу (мал. 83). Але — без зображень людей та інших живих істот, адже Коран забороняє створювати такі зображення. А голландський художник М. Ешер, ігноруючи цю заборону, створив багато оригінальних орнаментів із зображень людей і тварин. Такою є, наприклад, його мозаїка «Рицарі на конях» (мал. 84).



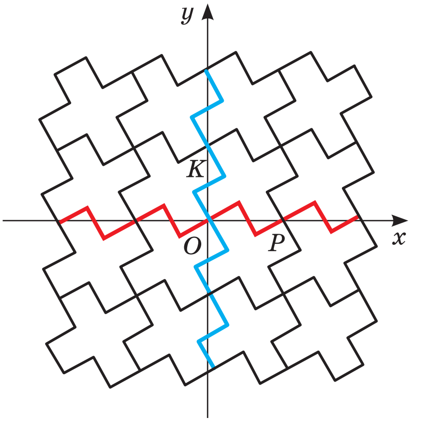
Мал. 84

Як можна створювати такі площинні орнаменти і паркети з рівних фігур? Розглянемо один спосіб.

Розгляньте періодичну функцію, графіком якої є нескінченна в обидва боки ламана A (мал. 85). Перенісши її вздовж осі ординат на вектор $n \cdot \overline{OK}$, де n пробігає множину всіх цілих чисел, утворимо безліч подібних графіків періодичних функцій.



Мал. 85



Мал. 86

Якщо всі ці ламані повернути навколо початку координат на прямий кут, утвориться ще одна множина ламаних, яка з першою множиною розбиває всю площину на безліч періодично розташованих хрестоподібних фігур (мал. 86). Таким способом рівними періодичними лініями можна розбивати площину на безліч регулярно розташованих рівних фігур, утворюючи різні паркети, орнаменти і мозаїки.

Перевірте себе

1. Що називають коливанням? Які бувають коливання?
2. Яке коливання називають гармонічним?
3. У яких одиницях визначається амплітуда, період, кутова швидкість, фаза гармонічного коливання?
4. Як можна створювати стрічкові та площинні орнаменти?

Виконаємо разом

1) Визначте амплітуду, фазу, початкову фазу і кутову швидкість гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y = 6\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 0{,}8\sin 3t$.

Розв'язання. а) Амплітуда дорівнює 6, $2t + \frac{\pi}{6}$ — фаза, $\frac{\pi}{6}$ — початкова фаза, 2 — кутова швидкість.

б) 0,8 — амплітуда, $3t$ — фаза, 0 — початкова фаза, 3 — кутова швидкість.

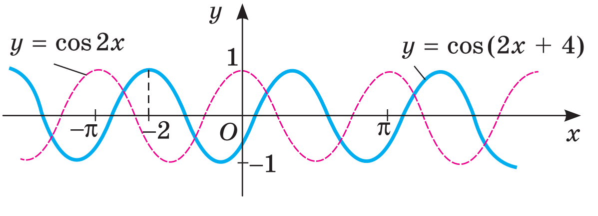
2) Побудуйте графік функції $y = 3\cos(2x + 4)$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = 3\cos 2(x + 2)$.

1) Будуємо графік функції $y = \cos x$;

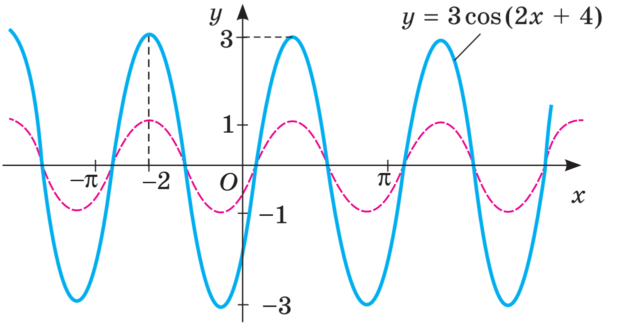
2) стискаємо його до осі y у відношенні $1 : \frac{1}{2}$;

3) отриманий графік переносимо вздовж осі x паралельно на 2 одиниці ліворуч (мал. 87);



Мал. 87

4) розтягом від осі x у 3 рази дістанемо, нарешті, потрібний графік (мал. 88).



Мал. 88

Виконайте усно

385. Знайдіть амплітуду гармонічного коливання, заданого формулою:

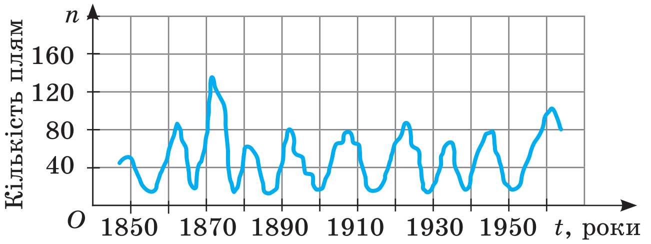
а) $y = 2,5\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = \sin 2,5t$;

в) $y = 8\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$;

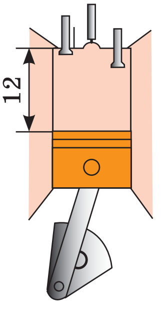
г) $y = 0,8\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$.

386. На малюнку 89 зображено графік функції, яка виражає залежність кількості сонячних плям від часу. Чи є ця функція періодичною?



Мал. 89

387. Хід поршня в циліндрі двигуна дорівнює 12 см (мал. 90). Знайдіть амплітуду його коливання.



Мал. 90

А

388. Визначте амплітуду, фазу, початкову фазу і кутову швидкість гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y = \frac{1}{2}\sin^2\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = 3\cos 3t$;

в) $y = 7\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y = 2\sin(3\pi t + 1)$.

389. Знайдіть період функцій:

а) $y = \sin 6x$; в) $y = 3\sin 5x$;

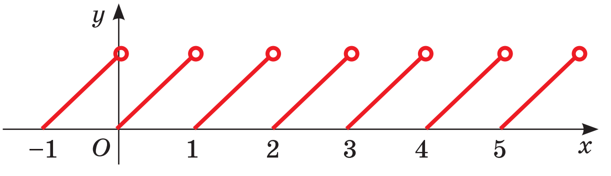
б) $y = \cos 0{,}5x$; г) $y = 0{,}5\cos (x + 1)$.

390. Знайдіть різницю між найбільшим і найменшим значеннями функції:

а) $y = 1{,}2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2t - \frac{\pi}{5}\right)$;

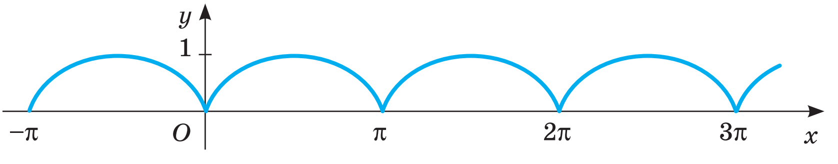
б) $y = \sqrt{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = 133\sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$.

391. На малюнку 91 зображено графік функції $y = \{x\}$ — «дробова частина числа». Чи періодична ця функція? Якщо так, то який її найменший додатний період? Чи є даний графік гармонікою?



Мал. 91

392. На малюнку 92 зображено графік функції $y = |\sin x|$. Чи періодична ця функція? Чи відповідає вона гармонічному коливанню?



Мал. 92

Знайдіть період гармонічного коливання **(393, 394)**.

393. а) $y = \sin 6x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = \cos 0{,}5x$.

394. а) $y = \cos 3x$; б) $y = \sin 1{,}5x$; в) $y = \sin 4x$.

Побудуйте графік гармонічного коливання **(395–398)**.

395. а) $y = 2\sin x$; б) $y = -2\sin x$; в) $y = 0{,}5\sin x$.

396. а) $y = 2\cos x$; б) $y = -2\cos x$; в) $y = 0{,}5\cos x$.

397. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

398. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Б

Знайдіть період функції **(399–401)**.

399. а) $y = 7\sin 2x$; б) $y = 2\cos 6x$; в) $y = 0{,}2\sin (x + n)$.

400. а) $y = 5\sin 0{,}1x$; б) $y = \cos (2x + 3)$; в) $y = 6\sin (2 + 3x)$.

401. а) $y = \mathrm{tg}\, 2x$; б) $y = 3\mathrm{tg}\, 0{,}25x$; в) $y = \mathrm{ctg}\, (3x - 0{,}5\pi)$.

Побудуйте графік функції **(402–406)**.

402. а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

403. а) $y=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=-3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

404. а) $y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\cos 0,5\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

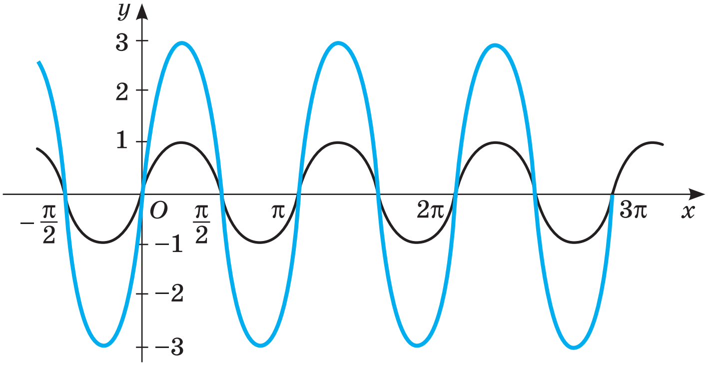
405. а) $y=\operatorname{tg} 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\operatorname{ctg} 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\operatorname{tg} 0,5\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

406*. а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=3\operatorname{tg}\left(0,5x+\frac{\pi}{4}\right)$.

407. Побудуйте графік періодичної функції з періодом $T = 2$, якщо на проміжку $[-1; 1]$ її можна задати формулою:
а) $y = x^2$; б) $y = x^2 - 1$.

408. Побудуйте графік періодичної функції з періодом $T = 4$, якщо на проміжку $[-2; 2]$ її можна задати формулою:
а) $y=|x|$; б) $y=1-|x|$.

409. Дивлячись на графіки гармонічних коливань (мал. 93), напишіть відповідні їм функції.



Мал. 93

410. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$,
де I_0 — максимальне значення сили струму; T — період коливання; φ — початкова фаза.
У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли його значення дорівнює нулю?

411. **Практичне завдання.** Побудуйте графік деякої періодичної функції на відрізку $[-5; 5]$. За допомогою цього графіка створіть площинні орнаменти чи паркети з рівних фігур, як описано на с. 88. Зафарбуйте отримані орнаменти двома або кількома кольорами.

Вправи для повторення

412. Спростіть вираз.

а) $(1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)\operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $1 - \sin \beta \cos \beta \operatorname{tg} \beta + \sin^2 \beta$.

413. У загальному обсязі забруднення атмосфери питома вага різних галузей промисловості й транспорту становить (у %): теплова енергетика — 25,7; чорна металургія — 23,4; нафтовидобувна і нафтохімічна — 13,7; транспорт — 11,6; кольорова металургія — 11,1; гірничодобувна — 7,1; підприємства будівельного комплексу — 3,4; машинобудування — 2,8; інші галузі — 1,2. Побудуйте секторну діаграму.

414. Чи є число 143 членом арифметичної прогресії 3, 8, 13, ...? Якщо так, то знайдіть номер цього члена прогресії.

§ 12. Формули додавання та наслідки з них

Тригонометричні функції використовують для моделювання багатьох реальних процесів. Під час дослідження утворених моделей доводиться перетворювати різні тригонометричні вирази, інколи досить громіздкі. Щоб спростити ці вирази, фахівці використовують формули додавання та наслідки з них.

До формул додавання відносять шість формул, поданих нижче.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Чотири перші з них правильні для будь-яких кутів або чисел α і β, дві останні — для будь-яких допустимих значень α і β (коли всі тангенси у формулі мають значення).

Розглянемо, як ці формули використовують на практиці.

Приклад 1. Обчисліть значення $\sin 75°$.

Розв'язання. $\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Приклад 2. Обчисліть значення виразу $\cos 35° \cos 25° - \sin 35° \sin 25°$.

Розв'язання. $\cos 35° \cos 25° - \sin 35° \sin 25° = \cos(35° + 25°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Якщо у формулах додавання замість змінної β підставити α, дістанемо тотожності:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Це *формули подвійного аргументу*. Вони правильні при будь-яких значеннях α (остання — за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ існують). Формули подвійного аргументу часто використовують для перетворень тригонометричних виразів. Наприклад:

- $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$
- $\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\operatorname{tg} 2\alpha = \left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$

Зверніть увагу на вирази $1 + \cos 2\alpha$ і $1 - \cos 2\alpha$.
$1 + \cos 2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha,$
$1 - \cos 2\alpha = 1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha.$

Звідси, $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.

Ці тотожності називають **формулами пониження степеня**. Замінивши в них α на $\dfrac{\alpha}{2}$, дістанемо **формули половинного аргументу**:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Для прикладу обчислимо $\operatorname{tg} 15°$.

Оскільки $\operatorname{tg} 15° > 0$, то $\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}.$

Звідси, $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$.

Зауваження. Іноді аргумент α доцільно розглядати як подвійний відносно аргументу $\dfrac{\alpha}{2}$ або половинний відносно 2α. Наприклад, $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$.

На практиці часто використовують формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток (різницю вважають окремим видом суми). Дві останні формули правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ існують.

!

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Перевірте себе

1. Які тригонометричні рівності називають формулами додавання?
2. Як можна отримати формули подвійних аргументів?
3. Як можна отримати формули пониження степеня?
4. Чи одне й те саме означає косинус суми і сума косинусів?
5. Як визначити косинус (синус) суми двох кутів?

Виконаємо разом

1) Спростіть вираз: а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha$; б) $\cos\frac{2\alpha}{3}-\cos^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3}$.

Розв'язання. а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0$;

б) $\cos\frac{2\alpha}{3}-\left(\cos^2\frac{\alpha}{3}-\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)=\cos\frac{2\alpha}{3}-\cos\frac{2\alpha}{3}=0.$

2) Доведіть тотожність $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$.

Розв'язання. Перетворимо праву частину тотожності за формулою суми косинусів:

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=\cos\alpha\cos\beta.$$

Отже, рівність правильна при будь-яких значеннях α і β.

3) Запишіть у вигляді добутку вираз $1-2\cos\alpha$.

Розв'язання. $1-2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\right)=$

$$=2\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Виконайте усно

Спростіть вираз **(415–418)**.

415. а) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; в) $\cos\alpha\cos 2-\sin\alpha\sin 2$;
б) $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; г) $\cos x\cos y+\sin x\sin y$.

416. а) $2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin x\cos x$; в) $4\cos\beta\sin\beta$; г) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$.

417. а) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; б) $\sin^2 x-\cos^2 x$; в) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; г) $\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$.

418. а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; в) $\frac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$.

А

419. а) $\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x$; в) $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$;

б) $\cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta$; г) $\sin \alpha \sin \frac{\pi}{5} + \cos \alpha \cos \frac{\pi}{5}$.

420. а) $\sin (\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta$; в) $\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$;

б) $\sin \alpha \sin \beta + \cos (\alpha + \beta)$; г) $\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)$.

Обчисліть значення виразу **(421, 422).**

421. а) $\cos 57° \cos 27° + \sin 57° \sin 27°$;

б) $\sin 11° \cos 19° + \cos 11° \sin 19°$;

в) $\cos 51° \sin 21° - \cos 21° \sin 51°$;

г) $\sin 12° \cos 18° + \cos 12° \sin 18°$.

422. а) $\cos 58° \cos 32° - \sin 58° \sin 32°$;

б) $\sin 65° \cos 55° + \cos 65° \sin 55°$;

в) $\sin 64° \sin 19° + \cos 64° \cos 19°$;

г) $\cos 10° \cos 20° - \sin 20° \sin 10°$.

Математика —
це різновид мистецтва.
Н. Вінер

Доведіть тотожність **(423–425).**

423. а) $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$;

б) $\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2\sin \alpha \sin \beta$.

424. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \cos \alpha$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sqrt{3} \sin \alpha$.

425. а) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \cos \alpha \cos \beta$; б) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \sin \alpha \sin \beta$.

426. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 15° \cos 15°$; в) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$; ґ) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$;

б) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$; г) $1 - 2\sin^2 15°$; д) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} : \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}\right)$.

Спростіть вираз **(427–430).**

427. а) $2\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$; в) $\sin 2x - (\sin x + \cos x)^2$;

б) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$; г) $\cos^2 \beta\, (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)$.

428. а) $2\cos^2 \frac{\pi - \alpha}{2} \sin^2 \frac{\pi - \alpha}{2}$; в) $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x \sin^2 x}$;

б) $\cos^2\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$; г) $\frac{2\cos^2 x \operatorname{tg} x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

429. а) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; б) $\frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x}$; в) $\frac{1 + \cos 2\beta}{1 - \cos 2\beta}$; г) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

430. а) $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{1+\cos 4x}$; в) $\dfrac{1-\cos 6x}{\sin 3x}$;

б) $(1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha)\mathrm{tg}\ 2\alpha$; г) $(1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha) : 2\mathrm{tg}\ \alpha$.

Доведіть тотожність **(431–433)**.

431. а) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x$; в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

б) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$; г) $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$.

432. а) $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; в) $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

б) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; г) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

433. а) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$; в) $(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha)\sin 2\alpha = 2\mathrm{ctg}\ \alpha$;

б) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$; г) $(\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{ctg}\ \alpha)\cos 2\alpha = \mathrm{ctg}\ \alpha - \mathrm{tg}\ \alpha$.

434. Спростіть вираз:

а) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$; в) $\sin 50^\circ - \sin 10^\circ$;

б) $\cos 50^\circ + \cos 10^\circ$; г) $\cos 50^\circ - \cos 10^\circ$.

Запишіть у вигляді добутку вираз:

435. а) $\sin 5\alpha + \sin\alpha$; в) $\cos x - \cos 3x$;

б) $\sin 5\beta - \sin\beta$; г) $\cos y + \cos 7y$.

Б

Обчисліть значення виразу **(436–438)**.

436. а) $\sin\dfrac{\pi}{12}$; б) $\cos\dfrac{7\pi}{12}$; в) $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{12}$; г) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}$.

437. а) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$; б) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$; в) $\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{12}$; г) $\mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{12}$.

438. а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ - 0{,}25$; б) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}+0{,}75$.

Спростіть вираз **(439–445)**.

439. а) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; в) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$; г) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$.

440. а) $0{,}5\sin x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$;

б) $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin x$; г) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

441. а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

442. а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$; б) $\dfrac{\cos 17^\circ\cos 28^\circ-\cos 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 34^\circ\sin 146^\circ+\sin 236^\circ\sin 30^\circ}$.

443. а) $\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)$; б) $\sin(60^\circ+x)+\sin(60^\circ-x)$.

444. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

445. а) $\cos\alpha+\sin\alpha$; в) $\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{3}$;

б) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$; г) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

Доведіть тотожність **(446–449)**.

446. а) $1+\sin 2\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $1-\sin 2\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

447. а) $\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; б) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

448. а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

449. а) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$; б) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

450. Установіть відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д), за умови, що $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1 $\cos\alpha+\cos 5\alpha$
2 $\sin\alpha+\sin 3\alpha$
3 $\sin\alpha+\sin 4\alpha$
4 $\cos 2x-\cos 4x$

А -1
Б 0
В $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Г $\sqrt{3}$
Д 1

451. Доведіть тотожність:

а) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$;

б) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$.

452. Доведіть, що:

а) $\sin 35^\circ\sin 55^\circ=\frac{1}{2}\cos 20^\circ$; в) $\sin^4\frac{3\pi}{8}-\cos^4\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos 65^\circ\cos 25^\circ=\frac{1}{2}\cos 40^\circ$; г) $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

453. Дано: $\sin \alpha = 0{,}8$; $90° < \alpha < 180°$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

454. Дано: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $270° < \alpha < 360°$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

455. Обчисліть значення $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4$.

Доведіть тотожність **(456–459)**.

456. а) $(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) \operatorname{tg} 4\alpha = \sin 2\alpha + \sin 6\alpha$;
б) $(\cos \alpha + \cos 5\alpha) \operatorname{tg} 3\alpha = \sin \alpha + \sin 5\alpha$.

457. а) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$; б) $\sin 2\alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -\cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

458. а) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1$;
б) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

459. а) $2\sin(45° + \alpha) \sin (45° - \alpha) = \cos 2\alpha$;
б) $\operatorname{tg} (\alpha + 45°) + \operatorname{tg} (\alpha - 45°) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

460. Доведіть тотожності Л. Ейлера:
а) $\sin (30° + z) = \cos z - \sin (30° - z)$;
б) $\cos (30° + z) = \cos (30° - z) - \cos z$.

461. **Практичне завдання.** Важливі тригонометричні формули, що дають можливість розкладати $\sin mx$ і $\cos mx$ за степенями $\sin x$ і $\cos x$, вивів Франсуа Вієт. Використовуючи їх, спробуйте отримати формули для знаходження $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\cdot \sin^2 \alpha + \ldots$$

$$\sin m\alpha = m\cos^{m-1} \alpha \cdot \sin\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \ldots$$

Підготуйте презентацію про цікаві факти з життя Франсуа Вієта.

Вправи для повторення

462. З двох міст, відстань між якими 500 км, виїхали назустріч один одному автомобіль і мотоцикл, які зустрілися через 5 год. Швидкість руху автомобіля у 3 рази більша, ніж швидкість руху мотоцикла. Яка швидкість руху автомобіля і яка мотоцикла?

463. Розв’яжіть нерівність:
а) $(x + 3)(x - 2) > 0$; б) $(2x - 1)(x - 5) \le 0$.

464. За даними Дитячого фонду ООН (ЮНІСЕФ), в Україні 120 000 підлітків 10–19 років віднесено до груп ризику. З них 75 % — це «діти вулиці». 45 % підлітків із груп ризику внаслідок своєї поведінки наражаються на ризик інфікування ВІЛ. Установіть: а) скільки підлітків із груп ризику становлять «діти вулиці»? б) скільки підлітків із груп ризику наражаються на ризик інфікування ВІЛ?

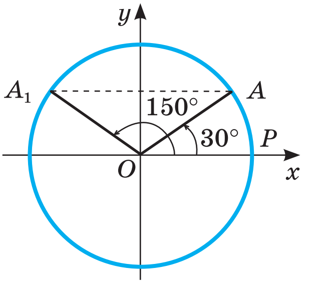
§ 13. Тригонометричні рівняння

> Рівняння називають **тригонометричним**, якщо його невідомі входять тільки під знаки тригонометричних функцій.

Приклади тригонометричних рівнянь: $\sin x = 0{,}5$; $2\cos x = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} 3x = 7$. До розв'язування тригонометричних рівнянь зводяться задачі різних галузей знань і практики.

Приклад. Сторони трикутника дорівнюють 15 см і 8 см. Знайдіть кут між ними, якщо площа трикутника 30 см^2.

Розв'язання. Площу S трикутника можна визначити за формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, де a, b — його сторони, а α — кут між ними. Якщо шуканий кут даного трикутника містить x градусів, то $30 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot \sin x$, звідси $\sin x = \frac{1}{2}$.



Мал. 94

Отримали тригонометричне рівняння. Розв'яжемо його. Синус кута дорівнює 0,5, коли кут має 30° або 150° (мал. 94).

Трикутники з такими кутами існують.

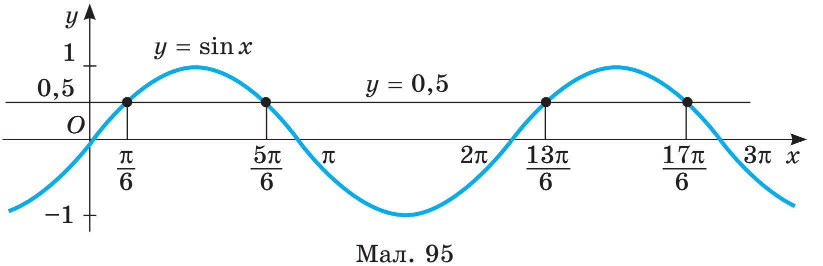
Відповідь. 30° або 150°.

У розглянутому випадку кути не можуть бути від'ємними або більшими за 180°. А взагалі рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ має безліч розв'язків:

$$30° + 360° \cdot n \text{ і } 150° + 360° \cdot n, \text{ де } n \in Z.$$

Розв'язуючи тригонометричне рівняння, найчастіше знаходять усю множину його розв'язків. І виражають їх здебільшого не в градусах, а в абстрактних числах. Наприклад, множину розв'язків рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ записують так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, де $k \in Z$.

Те, що рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ має безліч розв'язків, видно з його графічного розв'язання: графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ мають безліч спільних точок (мал. 95).



Мал. 95

Приклади. Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; б) $\cos x = 0,6$.

Розв'язання. а) Перетворимо дане рівняння: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус x дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, коли $x = \frac{\pi}{6}$ або $x = -\frac{\pi}{6}$.

Об'єднуючи дві знайдені рівності і враховуючи періодичність функції косинус, можемо записати відповідь: $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) Рівняння $\cos x = 0,6$ можна розв'язати за допомогою калькулятора:

$\boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{6}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\cos^{-1}} \approx 0,927.$

Отже, маємо множину наближених розв'язків: $x \approx \pm 0,927 + 2\pi n,\ n \in Z$.

А як знайти множину точних розв'язків такого рівняння? Для цього використовують обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}\, x$. Значення цих функцій можна знайти у таблиці 3 на с. 62 або за допомогою калькулятора.

> **Арккосинусом** числа a ($|a| \le 1$) називають кут або число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0,5 = \frac{\pi}{3}$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$.

Множину розв'язків рівняння $\cos x = 0,6$ можна записати так: $x = \pm\arccos 0,6 + 2\pi n,\ n \in Z$.

Узагалі рівняння $\cos x = a$ при $|a| > 1$ розв'язків не має, а при $|a| \le 1$ множина його розв'язків $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.

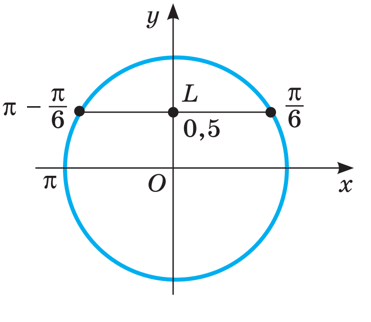
Аналогічно до арккосинуса означають арксинус і арктангенс.

> **Арксинусом** числа a ($|a| \le 1$) називають кут або число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Рівняння $\sin x = 0,5$ має розв'язки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (мал. 96).

Оскільки функція $\sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π, то дане рівняння має дві серії розв'язків: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ і $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.



Мал. 96

Розв'яжемо ще рівняння $\sin x = -0{,}4$.

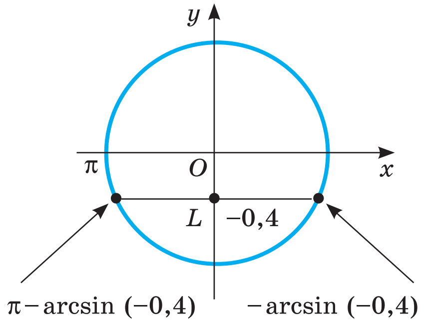
Два його розв'язки: $x = \arcsin(-0{,}4)$ і $x = \pi - \arcsin(-0{,}4)$ (мал. 97). Усі розв'язки: $x_1 = \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n$ і $x_2 = \pi - \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n$, $n \in Z$.

Узагалі рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків, якщо $|a| > 1$.

Якщо $|a| \le 1$, то множина його розв'язків складається з двох серій:

$x_1 = \arcsin a + 2\pi n$ і

$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$.



Мал. 97

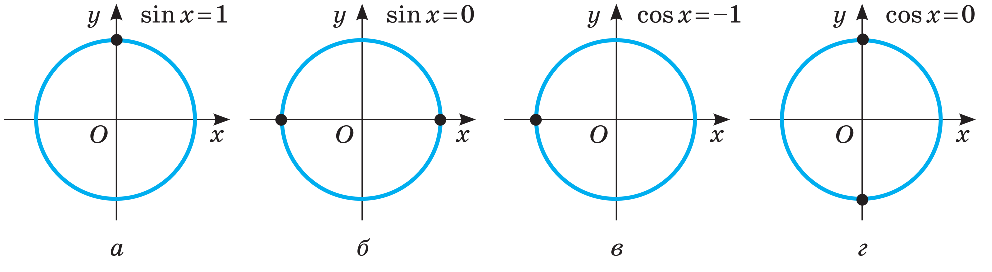
Дві останні формули можна записати так:

$x_1 = \arcsin a + \pi \cdot 2n$, $x_2 = -\arcsin a + \pi(2n + 1)$.

Отже, коли множник при π парний чи непарний, то $\arcsin a$ береться відповідно з плюсом чи мінусом.

Ці випадки об'єднує рівність $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

Така загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \le 1$.



Мал. 98

Рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$, якщо a дорівнює 0, 1 або −1, можна розв'язувати і за загальними формулами, але зручніше — уявляючи одиничне коло (мал. 98). Наприклад, рівняння

$\sin x = 1$ має множину розв'язків $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\sin x = 0$ має множину розв'язків $x = \pi n$;

$\cos x = -1$ має множину розв'язків $x = \pi + 2\pi n$;

$\cos x = 0$ має множину розв'язків $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

Тут і далі в подібних рівностях n — довільне ціле число.

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки при будь-якому дійсному a. Один його розв'язок $x = \operatorname{arctg} a$, де **arctg *a*** — кут або число з проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a. Оскільки функція $\operatorname{tg} x$ періодична з найменшим додатним періодом π, то множина всіх розв'язків даного рівняння $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

Формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь подано в таблиці 5.

Таблиця 5

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = a$,	$\lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = a$,	$\lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\operatorname{tg} x = a$		$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

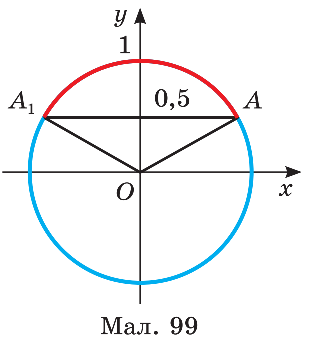
Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ при $a = 0$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. У всіх інших випадках воно рівносильне рівнянню $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Розв'язуючи складніші тригонометричні рівняння, зводять їх до простіших, як це зазвичай роблять при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Деякі тригонометричні рівняння зводять до квадратних.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\cos x = y$. Рівняння $2y^2 + 3y - 2 = 0$ має два корені: $y = -2$ і $y = 0{,}5$. Значення косинуса не може дорівнювати -2. Отже, $\cos x = 0{,}5$, звідси $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in Z$.



Мал. 99

А як розв'язати, наприклад, нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$?

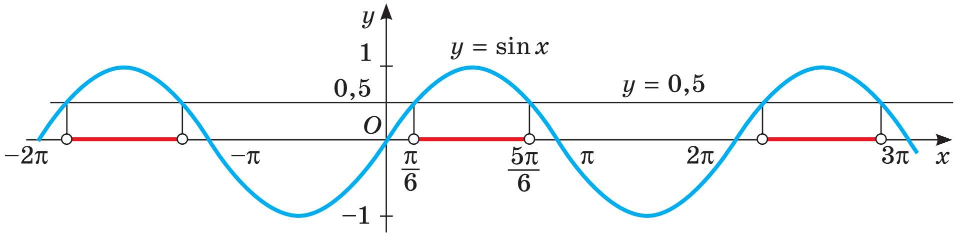
Подивимося на одиничне коло (мал. 99). Усі його точки, ординати яких більші від $\frac{1}{2}$, лежать на виділеній дузі AA_1. Точка A відповідає куту або числу $\frac{\pi}{6}$, а точка A_1 — куту або числу $\frac{5\pi}{6}$.

Отже, на проміжку $[0; 2\pi]$ нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ задовольняє кожне з чисел проміжку $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Проте це не вся множина розв'язків. Оскільки при кожному значенні x і цілому n $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, то дану нерівність задовольняють усі числа безлічі проміжків:

$$\ldots,\ \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right),\ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi; \frac{5\pi}{6} + 4\pi\right),\ \ldots$$

Відповідь прийнято записувати так: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, де $n \in Z$.

Дану нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ можна розв'язати і графічно. Для цього треба побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ (мал. 100). Ті значення x, при яких значення $\sin x$ більші за $\frac{1}{2}$, утворюють безліч проміжків. Вони і складають відповідь.

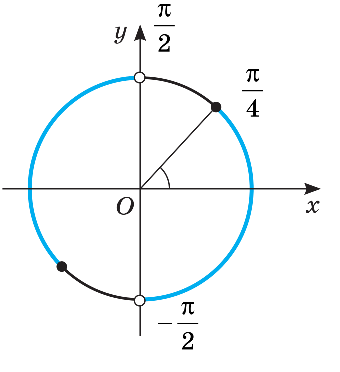


Мал. 100

Нерівності $\sin x > 1$, $\sin x < -1$, $\cos x > 1$, $\cos x < -1$ розв'язків не мають. Чому?

Кожну з нерівностей $\sin x \geq -1$, $\sin x \leq 1$, $\cos x \geq -1$, $\cos x \leq 1$ задовольняє будь-яке дійсне число і будь-який кут. Чому?

Нерівності $\operatorname{tg} x \leq a$ і $\operatorname{tg} x \geq a$ мають розв'язки при будь-яких a. Для прикладу розв'яжемо нерівність $\operatorname{tg} x \leq 1$. Оскільки на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс зростає і дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{4}$, то на цьому проміжку нерівність має множину розв'язків $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ (мал. 101). А оскільки $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ для кожного значення x з області визначення і будь-якого цілого n, то загальною множиною розв'язків даної нерівності є $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, де $n \in Z$.



Мал. 101

Спробуйте розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x \leq 1$ графічно.

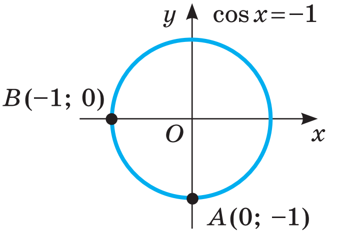
Перевірте себе

1. Які рівняння називають тригонометричними?
2. Скільки розв'язків має рівняння: $\sin x = 0$, $\cos x = 2$?
3. Що називають арксинусом, арккосинусом, арктангенсом числа a?
4. За якою формулою розв'язують рівняння $\sin x = a$?
5. Яку множину розв'язків має рівняння:
   $\cos x = 1$, $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = 0$?

Виконаємо разом

1) Розв'яжіть рівняння: а) $\sin 2x = -1$; б) $\cos 3\varphi = -1$.

Розв'язання. Розглянемо одиничне коло (мал. 102): відповідні точки $A(0; -1)$ і $B(-1; 0)$.



Мал. 102

а) Оскільки $\sin\alpha = y_\alpha$, то $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

б) Оскільки $\cos\alpha = x_\alpha$, то $3\varphi = \pi + 2\pi n =$

$= \pi(2n + 1)$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi(2n+1),\ n \in Z.$

2) Знайдіть найменший невід'ємний корінь рівняння $\cos^4 x - 1 = \sin^4 x$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$, або $(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$, звідси $\cos 2x = 1$, $2x = 0$, $x = 0$.

3) Знайдіть корені рівняння: а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
б) $\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. а) Оскільки $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$, звідси $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$.

Розв'язуючи це квадратне рівняння відносно $\cos x$, дістанемо два найпростіших рівняння: $\cos x = 2$ і $\cos x = -\frac{1}{2}$. Очевидно, рівняння $\cos x = 2$ розв'язків не має. Розв'язками рівняння $\cos = -\frac{1}{2}$ є $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, або $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, де $k \in Z$.

б) Оскільки корені рівняння $\cos x = 0$ не є коренями даного рівняння (при $\cos x = 0$ $x = \pm\sqrt{1-0} = \pm 1$), то можна вважати, що $\cos x \neq 0$. Тому обидві частини даного рівняння можна поділити на $\cos^2 x$. Дістанемо: $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$. Це — квадратне рівняння відносно $\mathrm{tg}\,x$. Його корені: $\sqrt{3}$ і $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\mathrm{tg}\,x_1 = \sqrt{3}$, звідси $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z$;

$\mathrm{tg}\,x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, звідси $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Виконайте усно

Чи має розв'язки рівняння **(465–467)**?

465. а) $\sin x = 1{,}5$; б) $\cos x = 1$; в) $\mathrm{tg}\,x = 3{,}5$; г) $\mathrm{ctg}\,x = 0{,}5$.

466. а) $\sin x = 0{,}5$; б) $\cos x = 2{,}5$; в) $\mathrm{tg}\,x = 0$; г) $\mathrm{ctg}\,x = 5{,}5$.

467. а) $\sin x = -0{,}05$; б) $\cos x = 0{,}3$; в) $\mathrm{tg}\,x = -3{,}5$; г) $\mathrm{ctg}\,x = 1$.

Розв'яжіть рівняння **(468, 469).**

468. а) $\sin x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = 0$;
б) $\cos x = -1$; г) $\operatorname{ctg} x = 1$.

469. а) $\sin x = 0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x = 1$;
б) $\cos x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

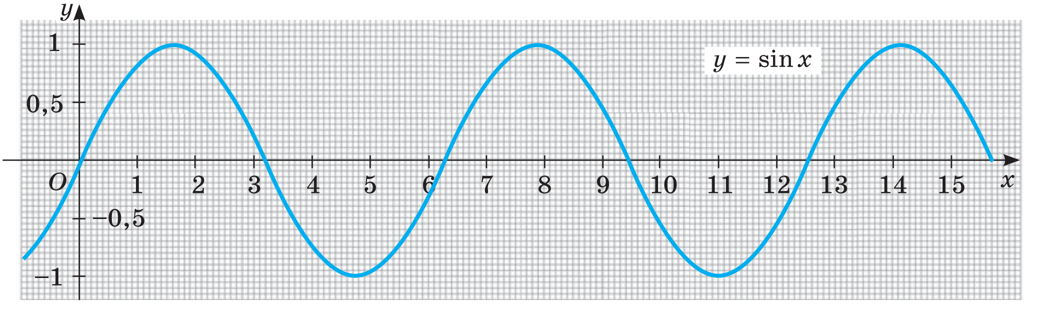
470. Скільки розв'язків має рівняння
а) $\operatorname{tg} x = 10$; в) $\cos x = \pi$;
б) $\sin x = 5$; г) $\sin x = \frac{\pi}{6}$?

А

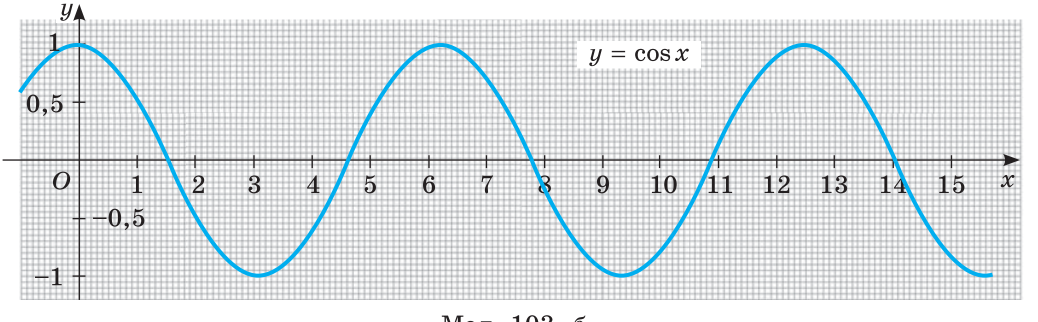
Використовуючи подані нижче графіки функцій (мал. 103), знайдіть наближені корені рівняння **(471, 472).**

471. а) $\sin x = 0{,}5$; в) $\cos x = -0{,}3$;
б) $2\sin x = -1{,}6$; г) $2\cos x = 1$.

472. а) $\cos x = 0{,}5$; в) $\sin x = -0{,}5$;
б) $\cos x = 1$; г) $\sin x = -1$.



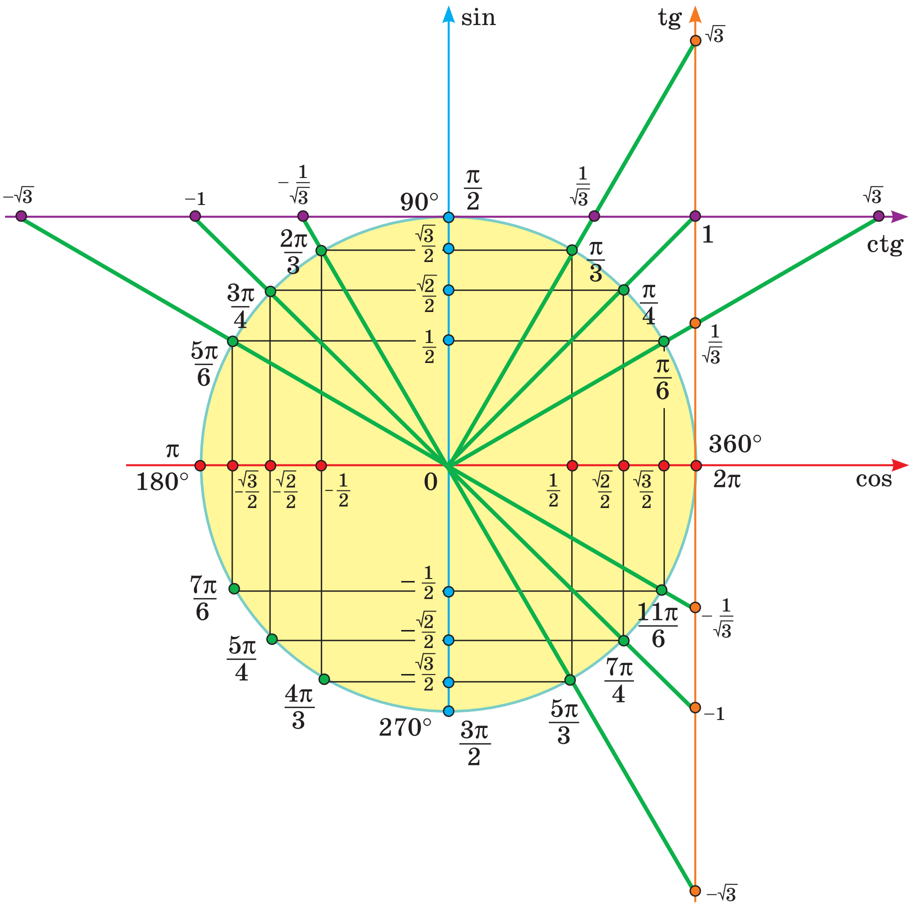
Мал. 103, *а*



Мал. 103, *б*

473. Укажіть координати точок перетину графіків функцій:
а) $y = \operatorname{tg} x$ і $y = -1$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = 1$.

474. **Практичне завдання.** На цупкому папері зобразіть модель «тригонометричного кола» (мал. 104), позначивши різними кольорами лінії синусів, косинусів, тангенсів і котангенсів. За його допомогою ви зможете швидко і впевнено розв'язувати простіші тригонометричні рівняння. Запишіть кілька рівнянь та їх розв'язки, що подані на малюнку 104.



Мал. 104

Розв’яжіть рівняння (475–477).

475. а) $\sin x = -1$; в) $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$; ґ) $\sin x = 0{,}5$;

б) $\cos x = 1$; г) $\mathrm{ctg}\, x = \sqrt{3}$; д) $\cos x = 0{,}5$.

476. а) $2\sin x = \sqrt{2}$; в) $\mathrm{tg}\ x = 1$; ґ) $2\sin x + 1 = 0$;

б) $2\cos x = \sqrt{3}$; г) $3\,\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$; д) $2\cos x + 1 = 0$.

477. а) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; в) $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$; ґ) $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\, x + 1 = 0$;

б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; г) $\mathrm{ctg}\, 2x = 1$; д) $\sqrt{2}\cos x = 1$.

Розв’яжіть рівняння (478–485).

478. а) $\sin^2 x = 3$; б) $\cos^2 x = 2$.

479. а) $\sin^2 x + \sin x = 0$; б) $\cos x - \cos^2 x = 0$.

480. а) $2\sin x + \sin 2x = 0$; б) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$.

481. а) $\sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2} = 0{,}25$; б) $\cos \dfrac{x}{2} \cdot \sin \dfrac{x}{2} = -1$.

482. а) $\cos x - \cos^2 x = \sin^2 x$; б) $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

483. а) $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$; б) $2\cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$.

484. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; б) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

485. а) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$.

486. Знайдіть кути паралелограма, якщо довжини його сторін дорівнюють 4 дм і 5 дм, а площа — $10\sqrt{2}$ дм^2.

487. Знайдіть кути ромба, якщо його площа дорівнює 18 дм^2, а периметр 24 дм.

Б

Розв'яжіть рівняння **(488–504)**.

488. а) $\cos x = 0{,}43$; б) $\sin x = 0{,}8$; в) $\operatorname{tg} z = -2{,}5$.

489. а) $2\cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$; б) $3\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\cos \frac{\varphi}{2} = 1$.

490. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; б) $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} \frac{x - 2\pi}{3} = 1$.

491. а) $\cos\left(\frac{x}{4} - 2\right) = 0$; б) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; в) $\operatorname{tg}^2 (\varphi - 1) = 0$.

492. а) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; б) $2\cos^2 (\varphi - \pi) = 1$; в) $\operatorname{tg}^2 (x - 2) = 1$.

493. а) $\sin x + \cos x = -0{,}5$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$.

494. а) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; б) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

495. а) $\sin^2 t + 2\sin t = 3$; б) $\cos^2 \varphi + 2 = 3\cos \varphi$.

496. а) $2\sin^2 x - \cos x = 1$; б) $2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = 1$.

497. а) $\sin x - \operatorname{tg} x = 0$; б) $\cos y - \cos 2y = 0$.

498. а) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$; б) $\cos 2t - \sin t = 0$.

499. а) $\cos 2x = 2\sin^2 x$; б) $2\operatorname{tg} \varphi + 3\operatorname{ctg} \varphi = 5$.

500. а) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$.

501. а) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; б) $\cos 4x + \cos x = 0$.

502. а) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$; б) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

503. а) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

504*. Розв'яжіть нерівність:

а) $\cos x \geq 0{,}5$; б) $2\sin x < \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x \leq 1$; г) $\cos x < 1$.

Знайдіть корені рівняння **(505–507)**.

505*. а) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 8\cos^2 x$; в) $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 1 = 0$;

б) $3\cos^2 x = 2\sin 2x - \sin^2 x$; г) $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sin 2x$.

506*. а) $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$; в) $5\sin x - 12\cos x = 13$;

б) $4\sin 2x + 5\cos 2x = 6$; г) $\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$.

507*. а) $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 0,5x} = 0$; в) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

б) $\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x} = 0$; г) $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.

508*. Великої шкоди сільськогосподарським культурам (виноградникам, плодовим деревам, зерновим тощо) завдають коники, що нерідко розмножуються до господарсько відчутної чисельності (мал. 105). Для убезпечення посівів еколог протягом t тижнів, де $0 \le t \le 12$, досліджував популяцію коників і встановив, що зміну їх чисельності наближено можна характеризувати формулою $K(t) = 7500 + 3000\sin\frac{\pi t}{8}$.

Установіть, протягом якого тижня чисельність коників сягала: а) 6000; б) 9000. Якою була найбільша і найменша чисельність коників протягом досліджуваного періоду. Можете скористатися ІКТ.

Вправи для повторення

509. Спростіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$;

г) $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

Мал. 105

510. Чи можна ввімкнути в коло прилад з опором 38 ± 0,5 Ом, щоб за напруги 215 ± 15 В сила струму не перевищувала 6,5 А?

511. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{2}{x(1+x)}$; в) $\frac{x^2}{4x^2 - 100}$; ґ) $\frac{1}{x^3 - x^2}$;

б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; д) $\frac{3}{9x - x^3}$?

512. Маємо 10 торбинок з монетами, у дев'яти з них справжні монети вагою 10 г кожна, а в одному — фальшиві монети вагою 9 г кожна. Є ваги, що показують загальну вагу монет. Як за допомогою одного зважування знайти мішок із фальшивими монетами?

Самостійна робота 3

Варіант 1

1 Заповніть таблицю.

Градусна міра кута	$0°$	$30°$		$90°$		
Радіанна міра кута			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

2 Спростіть вираз:
а) $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \text{tg}^2 \alpha)$; б) $\sin 6x - \sin 4x$.

3 Обчисліть $\sin x$, $\text{tg}\, x$, $\text{ctg}\, x$, якщо $\cos \alpha x = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Варіант 2

1 Заповніть таблицю.

Градусна міра кута		$45°$		$120°$		
Радіанна міра кута	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$	2π

2 Спростіть вираз:
а) $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \text{ctg}^2 \alpha)$; б) $\cos 3x + \cos x$.

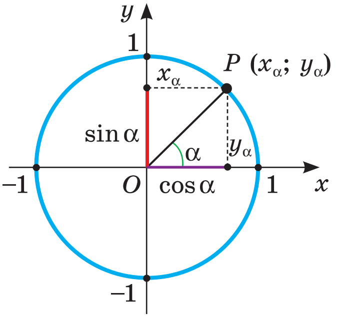
3 Обчисліть $\cos x$, $\text{tg}\, x$, $\text{ctg}\, x$, якщо $\sin x = -\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

ТВОРЧІ ЗАВДАННЯ

1. Опишіть процеси у довкіллі, які періодично повторюються.
2. Дослідіть за допомогою програмних засобів, як залежить кількість розв'язків тригонометричних рівнянь виду $A \sin x = m$ ($A \cos x = m$, $A \,\text{tg}\, x = m$) від значень A і m.
3. Вивчіть процес створення стрічкових орнаментів і створіть орнамент за власним мотивом.
4. Вивчіть процес створення площинних орнаментів і створіть орнамент за власним мотивом.
5. Дізнайтеся про способи створення орнаментів за допомогою ІКТ. Створіть орнаменти за власним мотивом.
6. Підготуйте презентацію на тему «Історія створення тригонометрії».

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

✓ Знаю тригонометричні функції числового аргументу та їхні властивості:



Мал. 106

$y_\alpha = \sin\alpha$; $x_\alpha = \cos\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$;

$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$

✓ Знаю і вмію використовувати тригонометричні тотожності.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\beta - \alpha}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$	$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

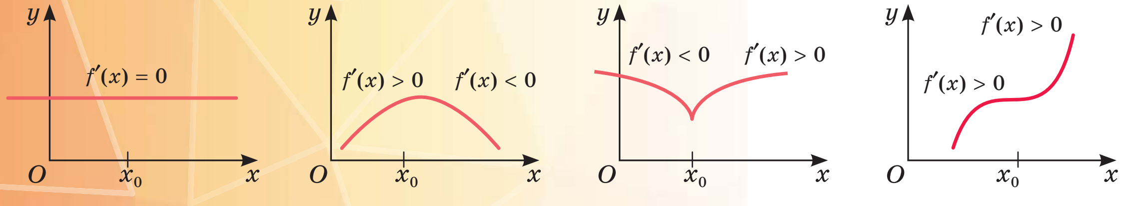
Формули розв'язків тригонометричних рівнянь

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = a$,	$\lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = a$,	$\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\operatorname{tg} x = a$		$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$

РОЗДІЛ 3.
ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

CHAPTER 3.
DERIVATIVE AND ITS APPLICATIONS

У цьому розділі розглянемо такі теми:



§ 14. Приріст аргументу і функції в точці

Життя вимагає досліджувати процеси, що відбуваються навколо нас. При цьому часто виникає потреба у встановленні змін кількісних показників, що стосуються природи, економіки, промисловості, сільського господарства, політики, особистого життя тощо, у певні проміжки часу. Аналіз змін окремих параметрів функціонування суспільства за конкретні проміжки часу дає можливість детальніше вивчати ці зміни і певним чином впливати на важливіші з них.

Ви вже знаєте, що реальні процеси можна моделювати за допомогою функції, а тому слід добре розуміти і вміти досліджувати поведінку функції біля конкретної точки, знати, як змінюються значення функції при зміні значення аргументу. Для цього використовують поняття приросту аргументу і функції.

Досліджуючи функції, часто говорять про значення функції в точці, приріст функції в точці, неперервність функції в точці. Про які точки йдеться? Про точки осі абсцис — значення аргументу.

Значення функції в точці. Нехай задано, наприклад, функцію $f(x) = x^3 + 1$. Якщо $x = 1$, то відповідне значення функції дорівнює 2. Кажуть, що в точці $x = 1$ значення функції $f(x)$ дорівнює 2. У точці $x = 0$ її значення дорівнює 1, у точці $x = 10$ значення функції $f(x)$ дорівнює 1001. Пишуть: $f(1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(10) = 1001$.

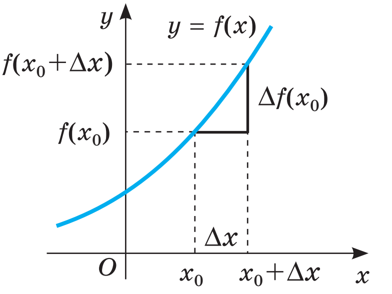
> !
>
> **Приростом аргументу** в точці $x_0 = a$ називають різницю $x - a$, де x — довільне число, яке мало відрізняється від a. Він може бути додатним або від'ємним. Відповідним **приростом функції** $f(x)$ є різниця $f(x) - f(a)$.

Приріст аргументу і функції. Нехай дано, наприклад, функцію $f(x) = x^2$. У точці $x_0 = 2$ її значення $f(2) = 4$.

Збільшимо значення аргументу на 0,01, тобто нехай $x = 2{,}01$. Відповідне значення функції $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Порівняно з попереднім значенням воно збільшилося на 0,0401. Тут 0,01 — *приріст аргументу*, а 0,0401 — відповідний *приріст функції*, а саме: приріст функції $f(x) = x^2$ на проміжку [2; 2,01].

Приріст аргументу x позначають символом Δx, а приріст функції — Δf, Δy (читають: дельта ікс, дельта еф, дельта ігрек). Ці записи не означають добутки. У розглянутому прикладі $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

Геометрично приріст аргументу зображують приростом абсциси точки кривої, а приріст функції — приростом ординати цієї точки (мал. 107).

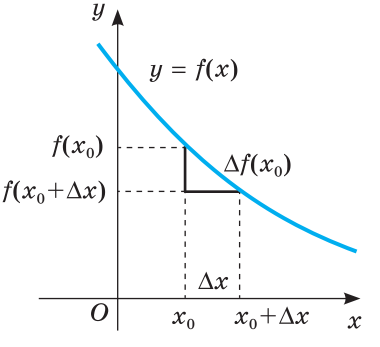


Мал. 107

Властивості цих понять видно на малюнках 107 і 108.

Якщо $y = f(x)$ — зростаюча і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число додатне.

Якщо $y = f(x)$ — спадна і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число від'ємне.



Мал. 108

Важливе значення для дослідження функції має відношення приросту функції до приросту аргументу в деякій точці. Це відношення називають *середньою швидкістю зміни функції*. Воно показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Середню швидкість зміни деякого процесу, що описується функцією $f(x)$, за час Δt визначають за формулою $\dfrac{\Delta f(t)}{\Delta t}$.

Приклад. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (час t — у секундах, відстань s — у метрах). Знайдіть середню швидкість руху матеріальної точки за час з 4-ї по 9-ту секунду.

Розв'язання. Знайдемо приріст аргументу Δt і приріст функції $\Delta s(t)$:

$\Delta t = 9 - 4 = 5$ (с);

$\Delta s(t) = s(9) - s(4) = 98 \cdot 9 - 4{,}9 \cdot 9^2 - (98 \cdot 4 - 4{,}9 \cdot 4^2) = 98 \cdot 9 - 4{,}9 \cdot 9^2 - 98 \cdot 4 + 4{,}9 \cdot 4^2 = 98 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot (9^2 - 4^2) = 490 - 318{,}5 = 171{,}5.$

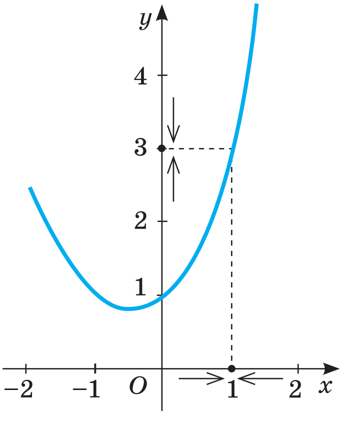
Можемо знайти середню швидкість руху v_c матеріальної точки (відношення приросту функції $\Delta s(t)$ до приросту аргументу Δt):

$$v_c = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{171{,}5}{5} = 34{,}3 \ \text{(м/с)}.$$

Границя функції в точці. Розглянемо функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо значення її аргументу x досить близькі до 1 і з обох боків наближаються до 1, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3. Про це свідчить графік, зображений на малюнку 109.

У цьому разі кажуть, що границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює 3. Пишуть:

якщо $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, або $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.



Мал. 109

Границя функції в точці має такі властивості.

- Функція не може мати двох різних границь у точці.
- Якщо c — число, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$.
- Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь цих функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їхніх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю.

Ці властивості використовують для обчислення границь функцій у заданих точках.

Приклад. За умови, що $x \to 5$, обчисліть границю функції $f(x)$, якщо $f(x) = x^2 - 10x + 17$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to5}\left(x^2-10+17\right)=\lim_{x\to5}x^2+\lim_{x\to}\left(-10x\right)+\lim_{x\to5}17=$$

$$=\lim_{x\to5}\left(x\right)^2-10\cdot\lim_{x\to5}x+\lim_{x\to5}17=5^2-10\cdot5+17=25-50+17=-8.$$

Зауваження. Розв'язуючи такі вправи, деякі перетворення можна виконувати усно.

Знаходження границь суттєво спрощується для *неперервних функцій* — функцій, графіком яких є неперервна лінія (див. с. 21). Для них виконується співвідношення:

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right).$$

Тобто *границя неперервної функції в кожній точці проміжку, на якому функція неперервна, дорівнює її значенню в цій точці.*

Теорія границь — великий і важливий розділ курсу математичного аналізу, який вивчається в університетах. Він є основою для вивчення похідної та її застосувань — могутнього апарату для дослідження багатьох реальних процесів. Ви цей матеріал розглянете оглядово, на основі наочних уявлень та інтуїції.

Перевірте себе

1. Як знайти значення функції в точці?
2. Що називають приростом аргументу? Як його позначають?
3. Що називають приростом функції? Як його позначають?
4. Поясніть, як знайти приріст функції в точці.

Виконаємо разом

1) Для функції $y = x^2$ знайдіть приріст функції, якщо значення аргументу переходить від 3 до 3,5.

Розв'язання. *Спосіб 1.* $f(3) = 3^2 = 9$, а $f(3,5) = 3,5^2 = 12,25$.
Отже, $\Delta f(x) = f(3,5) - f(3) = 12,25 - 9 = 3,25$.
Спосіб 2. Маємо: $f(x) = x^2$, а $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$.
Тоді $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Отже, $\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.
За цією формулою можна обчислити значення $\Delta f(x)$ для будь-яких x і Δx. Зокрема, у нашому прикладі $x = 3$, $\Delta x = 3,5 - 3 = 0,5$.
Тому $\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0,5 + 0,5^2 = 3 + 0,25 = 3,25$.

2) Відомо, що кількість населення деякого міста за час t (вимірюється у роках) змінюється за формулою $Q(t) = 20\,000 - 160t^2 + 800t$. Встановіть середню швидкість зміни кількості населення міста (в особах) за час від $t = 1$ до $t = 2{,}5$.

Розв'язання. Знайдемо приріст аргументу Δt і приріст функції $\Delta Q(t)$:

$\Delta t = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$ (року);

$\Delta Q(t) = 20\,000 - 160 \cdot 2{,}5^2 + 800 \cdot 2{,}5 - (20\,000 - 160 \cdot 1^2 + 800 \cdot 1) =$
$= 20\,000 - 1000 + 2000 - 20\,000 + 160 - 800 = 360$ (осіб).

Середня швидкість зміни функції — це відношення приросту функції до приросту аргументу:

$\dfrac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = \dfrac{360}{1{,}5} = 240$ (осіб за рік).

3) Обчисліть: а) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

Розв'язання. а) У точці $x = 3$ функція $y = \sqrt{x+1}$ неперервна, тому її границя дорівнює значенню функції в цій точці, а саме: $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$.

б) У точці $x = 1$ функція не визначена, але дріб $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ можна скоротити: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2$.

Оскільки для обчислення границі функції при $x \to 1$ саму точку $x = 1$ можна вилучити й не розглядати, то

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x - 2) = \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2 = 1 - 2 = -1.$$

Виконайте усно

513. Обчисліть значення функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 0$, якщо:

а) $f(x) = x - 5$; в) $f(x) = \sqrt{2x+1}$;

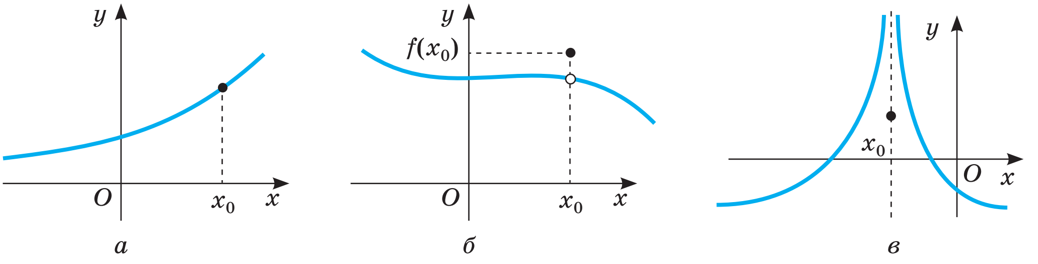
б) $f(x) = x^2 - x + 7$; г) $f(x) = 3x^2 - x$.

514. Для функції $y = 5x$ знайдіть Δx і Δy:

а) $x_0 = 2$, $x = 3$; б) $x_0 = 0$, $x = 5$; в) $x_0 = -0{,}2$, $x = 0{,}2$.

515. Яка з функцій, графіки яких зображені на малюнку 32, є неперервною: а) на всій області визначення; б) на проміжку $(-\infty; 0)$; в) на проміжку $(0; +\infty)$?

516. Для кожної з функцій, графіки яких зображені на малюнку 110, встановіть: а) чи визначена ця функція в точці x_0; б) чи існує границя функції в точці x_0 і чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.



Мал. 110

А

517. Дано функції $f(x) = x^2 - x + 1$ і $\varphi(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть її.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

518. Обчисліть значення функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 1$, якщо:

а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; в) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$.

519. Обчисліть значення функції $y = \varphi(x)$ у точці $x_0 = 2$, якщо:

а) $\varphi(x) = 3x^3 - x$; б) $\varphi(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$; в) $\varphi(x) = x^2 - 7x + 3$.

520. Знайдіть приріст аргументу в разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:

а) $x_0 = 1$, $x = 1{,}3$; б) $x_0 = 3$, $x = 3{,}5$; в) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}7$.

521. Знайдіть приріст функції $y = 3x + 1$ у разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:

а) $x_0 = 2$, $x = 2{,}3$; б) $x_0 = 5$, $x = 5{,}5$; в) $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}7$.

522. Для функції $y = 0{,}5x - 3$ знайдіть x і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$; б) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}4$; в) $x_0 = 2{,}1$, $\Delta x = 0{,}9$.

523. Для функції $y = 10x - 1$ знайдіть Δx і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $x = 1{,}2$; б) $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$; в) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}5$.

524. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал. 111). За даними графіка складіть таблицю і встановіть: а) кількість мишей на 4-й тиждень; б) коли кількість мишей перевищила 200 особин; в) приріст мишей з 4-го по 5-й тиждень.

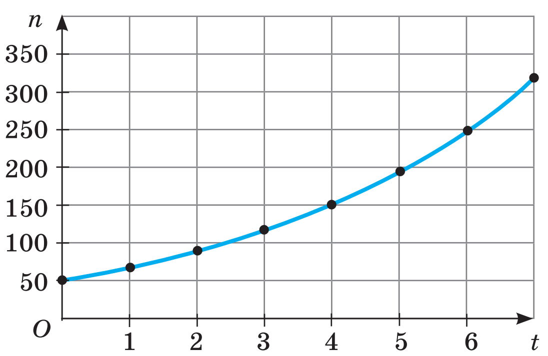
525. На малюнку 112 подано графік руху тіла $s(t)$ (шлях s у км, час t у год). Визначте: а) шлях, який пройшло тіло за перші 4 години руху; б) приріст шляху, пройденого тілом за час з 4-ї до 6-ї години.

Б

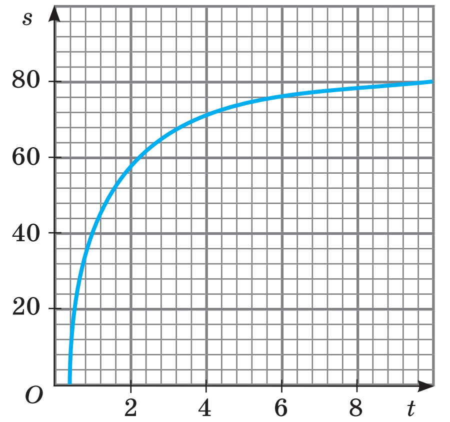
526. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал. 111). Визначте середню швидкість зростання популяції мишей:

а) з 4-го по 6-й тиждень;

б) за перші 5 тижнів.



Мал. 111



Мал. 112

527. На малюнку 112 подано графік руху тіла $s(t)$ (шлях s у км, час t у год). Визначте середню швидкість руху за час t, якщо:

а) $1 \le t \le 4$; б) $4 \le t \le 8$.

528. Для функції $y = 5x + 1$ знайдіть відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що аргумент змінюється від 10 до 15.

529. Знайдіть відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу у разі переходу від точки 1 до точки 1,1.

а) $f(x) = -2x + 3$; б) $f(x) = 1 - x^2$; в) $f(x) = x^3 - 1$.

530. Відомо, що для деякої фірми витрати на випуск x одиниць продукції описуються функцією $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (грн), а дохід, одержаний від реалізації x одиниць продукції, можна обчислити за формулою $R(x) = 200x - 0{,}05x$ (грн). Визначте приріст витрат і доходу для збільшення випуску одиниць продукції:

а) з 20 до 100; б) з 30 до 50.

531. За деякими підрахунками визначено, що фірма, виробляючи x одиниць продукції щомісяця, має витрати $K(x)$, що виражаються формулою $K(x) = 150 + 30x$ (грн), а дохід $R(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї самої продукції, становить $R(x) = 90x - 0{,}02x^2$ (грн). Якщо фірма збільшить щомісячний випуск продукції з 300 до 320 одиниць, як зміняться її: а) витрати; б) дохід; в) прибуток?

532. Обчисліть задані границі, побудувавши графік відповідної функції:

а) $\lim\limits_{x\to 5}(8-3x)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}(2x+0{,}5)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)$.

Обчисліть границі **(533–535)**.

533*. а) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-5)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-3x^3)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+5x^2)$.

534*. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{x^2-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{7}$.

535*. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$.

536*. Обчисліть границю функції $f(x)$ у точці, у якій функція не визначена, якщо:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

537. Для функції $y = 5 + x^2$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

538. Знайдіть границю відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо:

а) $f(x) = -x + 3$; б) $f(x) = 3x^2$; в) $f(x) = x^3 + 1$.

Вправи для повторення

539. Розміри прямокутника — 20 м і 10 м. Довжину кожної сторони цього прямокутника збільшили на 10 %. Знайдіть площу утвореного прямокутника.

540. Розв'яжіть нерівність:

а) $|x-1|<2$; б) $|x+3|>4$; в) $2|x-3|<5$.

541. Спростіть вираз:

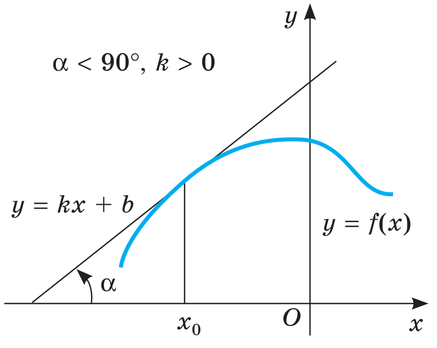
а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

542. Обчисліть: а) $3\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}150°$; б) $\mathrm{tg}60° + \mathrm{ctg}120°$.

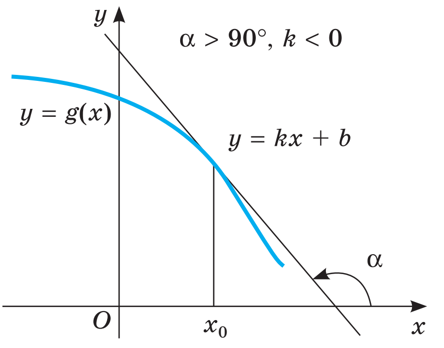
§ 15. Дотична до графіка функції. Похідна

Багатьом фахівцям часто доводиться досліджувати функції, тобто з'ясовувати, за яких умов та чи інша функція зростає чи спадає, за яких набуває найменшого чи найбільшого значення тощо. Досліджувати функції найкраще за допомогою *похідної* чи тісно пов'язаної з нею *дотичної* до графіка функції. Скористаємося спочатку інтуїтивним уявленням про дотичну. Згадайте, що дотична до кола — це пряма, яка лежить у площині цього кола і має з ним тільки одну спільну точку.

На малюнках 113 і 114 зображено графіки неперервних функцій $f(x)$ і $g(x)$ та дотичні, проведені до них у точках x_0. Дотична до кривої — це пряма. Її рівняння має вигляд $y = kx + b$, де k — *кутовий коефіцієнт*, $k = \text{tg}\ \alpha$ (якщо $k \neq 0$, то α — кут між променем дотичної, розміщеним вище від осі x, і додатним напрямом цієї осі).



Мал. 113



Мал. 114

Зверніть увагу на кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка функції у його точці з абсцисою x_0.

Якщо число x_0 належить проміжку зростання функції, то відповідне значення k додатне (мал. 113). Якщо x_0 належить проміжку спадання функції, то відповідне значення k від'ємне (мал. 114). І навпаки, якщо кожному значенню x із деякого проміжку $(a; b)$ відповідає додатне значення k, то на $(a; b)$ дана функція зростає; якщо кожному значенню x з деякого проміжку $(c; d)$ відповідає від'ємне значення k, то на $(c; d)$ функція спадає. Заслуговують на увагу і ті точки графіка функції, у яких дотична не існує і в яких вона паралельна осі x, тобто коли її кутовий коефіцієнт дорівнює 0.

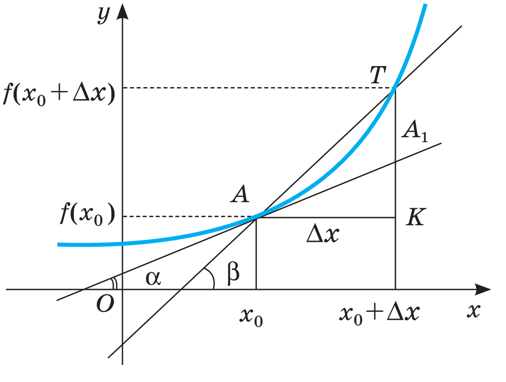
Отже, для дослідження функцій важливо вміти визначати кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка. Розглянемо детальніше зв'язок цього коефіцієнта з досліджуваною функцією.

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, у якій існує дотична до графіка (мал. 115).

Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината — $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx.

Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій



Мал. 115

точці K. Тоді $AK = \Delta x$ — приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ — приріст функції на $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо приріст аргументу Δx зменшувати так, щоб він прямував до нуля, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближатиметься до прямої AA_1. Таку пряму AA_1 — граничне положення січної AT при $\Delta x \to 0$ — називають *дотичною до графіка* даної функції в точці x_0.

Якщо $\Delta x \to 0$, то міра кута β прямує до α, а тангенс кута β — до $\operatorname{tg}\alpha$. Тобто якщо k — кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta\to\alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

До обчислення значення виразу

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{чи} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

приводять розв'язування багатьох задач із механіки, електрики, біології, економіки, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву — *похідна*.

> **!** **Похідною функції** $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідну функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}, \quad \text{або} \quad \boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$. Отже, $f'(3) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (6 + \Delta x) = 6.$

Відповідь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію.

Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

Якщо $\Delta x\to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x.$ Маємо $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

Отже, похідна функції x^2 у кожній її точці x дорівнює $2x$. Пишуть:

$(x^2)' = 2x$, або якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Зверніть увагу! Похідна функції в точці — це число. Але коли говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію:

- похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$;
- похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ тощо.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

Приклад 2. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Розв'язання. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Лінійна функція $y = ax + b$ має похідну в кожній точці x. Її похідна

!

$$y' = (ax + b)' = a.$$

Зокрема, $x' = 1$; $a' = 0$.

Запам'ятайте! Похідна сталої дорівнює нулю. У кожній точці дотична до графіка функції $y = a$, де a — стала, паралельна осі x.

Дотичною до прямої є ця сама пряма. З курсу планіметрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k — кутовий коефіцієнт прямої. Оскільки для дотичної до графіка функції $y = f(x)$ кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної в точці дотику, то можемо записати рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці дотику $(x_0; y_0)$:

!

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Зверніть увагу! $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$ (див. мал. 35).

Перевірте себе

1. Як знаходять похідну функції в даній точці?
2. Чим є похідна функції в точці?
3. Чим є похідна функції на проміжку?
4. Що розуміють, кажучи «похідна — це кутовий коефіцієнт дотичної»?
5. Чому дорівнює похідна сталої?
6. Що означає запис $(ax + c)' = a$? Який його геометричний зміст?

Виконаємо разом

1) Доведіть, що для кожного дійсного числа k та аргументу x $(kx^2)' = 2kx$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції $y = kx^2$ дорівнює $k(x + \Delta x)^2 - kx^2$.

Спростимо цей вираз:

$k(x + \Delta x)^2 - kx^2 = k(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = k\Delta x(2x + \Delta x)$.

Отже, $\left(kx^2\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k\Delta x\left(2x + \Delta x\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\left(2x + \Delta x\right) = 2kx$.

2) Доведіть, що для будь-якого значення x, відмінного від нуля, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює $\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{\left(x + \Delta x\right)x} = \dfrac{-\Delta x}{\left(x + \Delta x\right)x}$.

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\left(x + \Delta x\right)x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{\left(x + \Delta x\right)x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

3) Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Доведення. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$.

А це означає, що похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$.

4) Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Врахувавши, що $f(x) = x^2$, а $x_0 = 5$, знайдемо $f'(x)$, $f'(x_0)$ і $f(x_0)$:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$; $f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10$; $f(x_0) = 5^2 = 25$.

Підставимо знайдені значення в рівняння дотичної.

Маємо: $y = 10(x - 5) + 25$, або $y = 10x - 25$.

Виконайте усно

543. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:

а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2 + 0{,}5x$; г) $y = 2$.

544. Знайдіть значення похідної функції $y = 2x + 5$ у точці:

а) $x = 2$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = 100$.

545. Знайдіть значення похідної функції $y = x^2$ у точці:

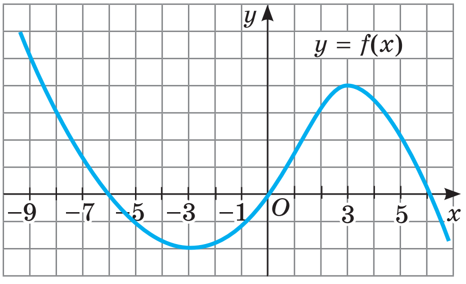
а) $x = 1$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = -10$.

546. Чому дорівнює похідна функції:

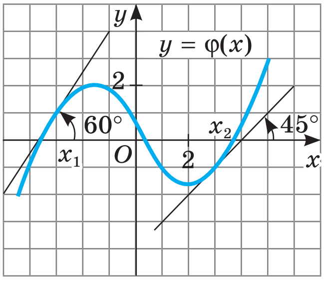
а) $y = 5$; б) $y = x$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$?

А

547. Укажіть декілька точок, у яких дотична до графіка функції $f(x)$ (мал. 116) утворює з додатним напрямом осі x
а) гострий кут; б) тупий кут.



Мал. 116



Мал. 117

548. Укажіть проміжки, на яких кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ (див. мал. 116) набуває:
а) додатних значень; б) від'ємних значень.

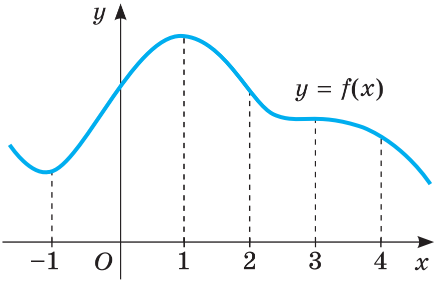
549. Які кутові коефіцієнти мають дотичні до графіка функції $\varphi(x)$ (мал. 117), проведені в точках x_1, x_2?

550. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $\varphi(x)$ (див. мал. 117), проведений у деякій точці, дорівнює k. Чи існують точки, у яких:
а) $k < 0$; б) $k = 0$?

551. Визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції (мал. 40) у точках з абсцисами $-0,5$; $0,5$; $1,5$; 4.

552. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 118) визначте наближені значення її похідної в точках x, що дорівнюють: -1, 0, 1, 2, 3.

553. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y - x + 5 = 0$;
б) $x + 2y + 3 = 0$;
в) $3x - 5y = 1$.



Мал. 118

554. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $(-3; 5)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в кожній точці проміжку $(-3; 2)$ додатний, а в кожній точці проміжку $(2; 5)$ — від'ємний. Знайдіть проміжки зростання та спадання цієї функції.

555. Обчисліть похідну функції $y = 5x$ у точці $x = 2$; у довільній точці x.

556. Обчисліть похідну функції $y = 3x + 5$ у точці $x = 4$; у довільній точці x.

557. Знаючи, що $(x^2)' = 2x$, обчисліть похідну функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = -2$; б) $x = 3$; в) $x = 10$; г) $x = -2,5$.

558. Побудуйте графік функції $y = 2x^2$ і проведіть до нього дотичну в точці з абсцисою x_0. Користуючись малюнком, визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, якщо: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 1$. Скориставшись формулою $(kx^2)' = 2kx$, знайдіть точне значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $y = x^2$ у цих точках.

559. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідних функції $f(x)$ у точках $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$, якщо:
а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = 0{,}5x^2$; в) $f(x) = 3x^2$.

560. Знаючи, що $(x^3)' = 3x^2$, обчисліть похідну функції $y = x^3$ у точці:
а) $x = 1$; б) $x = 5$; в) $x = 10$; г) $x = -1{,}5$.

561. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = 2{,}5$; б) $x = -2{,}5$; в) $x = \sqrt{5}$.

562. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у його точці з абсцисою:
а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

Б

563. Знайдіть координати точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2$, якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює 6.

564*. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = \sqrt{x}$ похідною буде функція $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

565. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{x}$ у точці:
а) $x = 1$; б) $x = 4$; в) $x = 36$; г) $x = 625$.

566. Користуючись задачею 2 (с. 123), обчисліть значення похідної функції $y = \dfrac{1}{x}$ у точці:
а) $x = 1$; б) $x = -4$; в) $x = 5$; г) $x = 10$.

567. Перепишіть у зошит подану нижче таблицю похідних найпоширеніших функцій і вивчіть її напам'ять.

$$a' = 0;\quad x' = 1;\quad (ax + b)' = a;\quad (x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

568. Доведіть, що похідна заданої функції набуває невід'ємних значень при всіх допустимих значеннях аргументу:
а) $y = 3x - 7$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = \sqrt{x}$.

569. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \dfrac{6}{x}$ у точці:
а) $x = -1$; б) $x = -2$; в) $x = 3$; г) $x = 6$.

Вправи для повторення

570. Розв'яжіть рівняння: а) $x^2 - 6x = 0$; б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

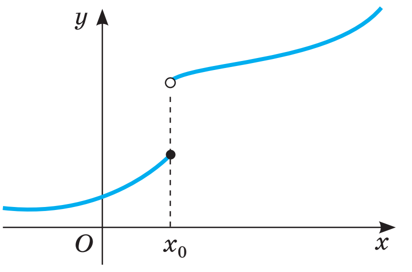
571. Спростіть вираз:
а) $(1 - \mathrm{tg}^2\, x) \cos^2 x$; б) $(\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{tg}\, x) \sin 2x$.

572. Головними чинниками негативного впливу на тваринний світ є знищення і трансформація природних екосистем, надмірне комерційне використання тваринного світу та браконьєрство. Особливої охорони та відновлення потребують види тварин, занесені до Червоної книги України: ракоподібні (31 тип), комахи (226), молюски (20), риби (69), птахи (87), ссавці (68), інші (41). Побудуйте стовпчасту і секторну діаграму, які відображають співвідношення між цими видами тварин.

§ 16. Диференціювання функцій

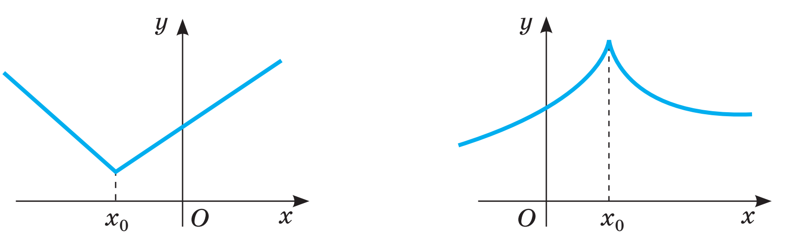
Ви вже вмієте знаходити похідні деяких функцій, користуючись означенням похідної. Далі сформулюємо кілька правил, які дають змогу порівняно легко і швидко визначати похідні багатьох інших функцій. Треба, однак, мати на увазі, що не кожна функція має похідну в кожній точці.

Наприклад, не мають похідних функції в точках розриву (мал. 119), у точках зламу (мал. 120) та в кінцевих точках області визначення функції. Але ми розглядаємо тільки такі функції, графіки яких — неперервні лінії, без точок зламу.



Мал. 119

> Операцію визначення похідної функції називають **диференціюванням.**



Мал. 120

Якщо функція має похідну в деякій точці (у кожній точці деякого проміжку), то говорять, що дана функція *диференційовна* в цій точці (на цьому проміжку). Кожний многочлен і кожна з функцій $\sin x$ і $\cos x$ диференційовні в кожній точці області визначення, тобто на всій множині дійсних чисел R.

Для знаходження похідних одночлена, суми, добутку та частки двох функцій використовують такі *правила диференціювання*.

1. $(Cu)' = Cu'$;
2. $(kx^n)' = knx^{n-1}$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Покажемо, як доводять формулу 3 (про похідну суми двох функцій).
Якщо функції u та v диференційовні в точці x, то в цій точці

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Доведення.

Знайдемо приріст $\Delta(u + v)$ суми даних функцій на $[x; x + \Delta x]$:
$\Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) =$
$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$

Тому $\dfrac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ і $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, тому $(u + v)' = u' + v'$. □

Аналогічно спробуйте самостійно довести, що $(u - v)' = u' - v'$.
Теорема правильна також для трьох і більше функцій.
Наприклад, $(u + v - w)' = ((u + v) - w)' = (u + v)' - w' = u' + v' - w'$.

Існують формули, за допомогою яких знаходять похідні й багатьох інших функцій. Їх подано в таблиці похідних.

Таблиця похідних

$c' = 0$, c — const	$(ax + b)' = a$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\cos x)' = -\sin x$
$x' = 1$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Кожна з цих формул доведена ще в XVII ст. Ви можете спробувати довести їх самостійно.

Розглянемо на конкретних прикладах, як наведені формули застосовують у процесі розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^5 \cdot \sin x$.
Розв'язання.
$f'(x) = (x^5 \cdot \sin x)' = (x^5)' \cdot \sin x + x^5 \cdot (\sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x.$

Приклад 2. Доведіть, що $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доведення.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Досі ви розглядали похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад $y = x^n$, $y = \sin x$. А як знаходити похідні функцій $y = (2x + 1)^{10}$, $y = \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$? Кожну з них можна розглядати як функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$, тобто $y = f(h(x))$.

> **!** Функцію $y = f(h(x))$ називають **складеною**, $u = h(x)$ — її внутрішньою функцією, а $f(u)$ — зовнішньою.

Складеними функціями описують, наприклад, синусоїдний струм — струм, що змінюється у часі за синусоїдним законом: $I = I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$. Саме такий вид струму уможливлює найбільш економічне здійснення виробництва, передавання, розподіл і використання електричної енергії.

Розглядаючи у функції $y = f(u)$ змінну u як аргумент, можна знайти похідну цієї функції по u. Її позначатимемо знаком y'_u. Похідні функцій по x, як і раніше, позначатимемо символами y', u'.

У курсі математичного аналізу доводять теорему про похідну складеної функції.

> **!** Нехай дано функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$. Якщо в якійсь точці x існує похідна u' та у відповідній точці u існує похідна y'_u, то існує також похідна y', причому $y' = y'_u \cdot u'$.

Якщо ж дана складена функція $y = f(h(x))$ диференційовна в кожній точці x деякого проміжку, то рівність $y' = y'_u \cdot u$ справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = (2x + 1)^{10}$.

Розв'язання. Це функція $y = u^{10}$, де $u = 2x + 1$. Ці функції диференційовані на R, $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Отже, $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$.

Не обов'язково, розв'язуючи такі вправи, вводити змінну u. Її можна тільки уявляти й одразу писати, наприклад:

$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Перевірте себе

1. Що називають диференціюванням функції?
2. Як знаходять похідну суми двох функцій?
3. Як знаходять похідну добутку двох функцій?
4. Як знаходять похідну частки?
5. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?
6. Як знаходять похідні тригонометричних функцій?

Виконаємо разом

1) Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

Розв'язання. *Спосіб 1.* Скористаємося теоремою про похідну добутку:

$f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5)' \cdot (1 - x^2) + 3x^5 \cdot (1 - x^2)' =$
$= 15x^4(1 - x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$

Спосіб 2. Спочатку розкриємо дужки, а потім застосуємо теорему про похідну суми. $f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6$.

2) Обчисліть значення похідної функції $f(x) = \dfrac{x+12}{3x}$ у точці $x_0 = 4$.

Розв'язання. $f'(x) = \left(\dfrac{x+12}{3x}\right)' = \dfrac{(x+12)' \cdot 3x - (x+12)\cdot(3x)'}{9x^2} =$

$= \dfrac{1\cdot 3x - (x+12)\cdot 3}{9x^2} = \dfrac{3x - 3x - 36}{9x^2} = -\dfrac{4}{x^2}$; $f'(4) = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4}$.

3) Обчисліть значення похідної функції $y = 3\sin x + 5\cos x$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про похідну суми:

$y' = (3\sin x + 5\cos x)' = (3\sin x)' + (5\cos x)' = 3(\sin x)' + 5(\cos x)' =$
$= 3\cos x - 5\sin x.$

Якщо $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, то $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cos\dfrac{\pi}{4} - 5\sin\dfrac{\pi}{4} = 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$

4) Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Знайдемо $f(-2)$ та $f'(-2)$; $f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$;
$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x$; $f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36$.
Отже, $y = -36(x + 2) + 20$ або $y = -36x - 52$.

5) Знайдіть y', якщо $y = \cos(x^2 - 1)$.

Розв'язання. $y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x =$
$= -2x\sin(x^2 - 1)$.

6) Знайдіть значення похідної функції $y = \sqrt{x^3 + x^2}$ у точці $x = 3$.

Розв'язання. $y' = \left(\sqrt{x^3 + x^2}\right)' = \dfrac{(x^3 + x^2)'}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}}$.

Якщо $x = 3$, то $y' = 2{,}75$.

Виконайте усно

Знайдіть похідну функції **(573, 574)**.

573. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = 2x^5$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

574. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 + \cos x$; в) $\operatorname{tg} x = 4\operatorname{tg} x$; г) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

Знайдіть значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 **(575, 576)**.

575. а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$.

576. а) $f(x) = (x - 1)(x + 1)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x_0 = 1$.

А

Знайдіть похідну функції **(577–580)**.

577. а) $f(x) = 5x^4$; в) $f(x) = 0{,}5x^6$; г) $f(x) = -2x^9$;
б) $f(x) = 0{,}8x^5$; г) $f(x) = -x$; д) $f(x) = -0{,}3x^5$.

578. а) $f(x) = x^2 + 3$; в) $f(x) = x^4 + 9x^2$;
б) $f(x) = 7 - x^3$; г) $f(x) = 3x^4 - x^8$.

579. а) $f(x) = 2(x^3 - 7)$; в) $f(x) = 0{,}2(5 - 3x^4)$;
б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{3}$; г) $f(x) = \dfrac{40 - 3x^5}{5}$.

580. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; в) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$;
б) $y = 2 - 3x - 8x^2$; г) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

Обчисліть значення похідної функції в даних точках **(581–583)**.

581. $f(x) = x^2 - 5x$, $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$.

582. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{2}$.

583. $f(x) = -8x + 3$, $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = \pi$.

Знайдіть похідну функції **(584, 586)**.

584. а) $y = 2\sin x + 1$; в) $y = 4\operatorname{tg} x - 3$; г) $y = \sin x + 2x$;
б) $y = 3\cos x + 2$; г) $y = \cos x + 3x$; д) $y = \operatorname{tg} x + 4x$.

585. а) $y = x^2 + \cos x$; в) $y = x^5 + \operatorname{tg} x$; г) $y = \sqrt{x} - \sin x$;
б) $y = x^4 - \sin x$; г) $y = \sqrt{x} + \operatorname{ctg} x$; д) $y = \sqrt{x} + \cos x$.

586. а) $y = x^{2,5}$; б) $y = -x^{0,5}$; в) $y = 2x^{1,7}$; г) $y = x^{-3}$.

Обчисліть значення похідної функції в даних точках **(587, 588)**.

587. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; б) $y = 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

588. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = 0{,}5\pi$; б) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Визначте двома способами похідну функції **(589–591)**.

589. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; в) $y = (x - 2)(x + 3)$;
б) $y = x^3(3x^2 - 1)$; г) $y = (x - 1)(x + 1)$.

590. а) $y = x^2(5 - x^3)$; в) $y = 5(x + 3)^2$;
б) $y = -7x(x^2 - 4)$; г) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

591. а) $f(x) = (x^4 - 2)x^3$; в) $f(x) = (x - 3)(x + 3)$;
б) $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$; г) $f(x) = 3(x - 7)^2$.

592. Заповніть таблицю «Правила диференціювання».

Функція	**Похідна**
$f(x) + \varphi(x)$	
$C \cdot f(x)$	
$f(x) \cdot \varphi(x)$	
$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	

593. Заповніть таблицю «Формули диференціювання».

$f(x)$	C	x	x^2	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\ x$	$\mathrm{ctg}\ x$
$f'(x)$								

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 **(594–596).**

594. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$.

595. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 0$; $x_0 = -4$.

596. $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$.

Б

597. Установіть відповідність між функціями (1–4), що визначені в деякій точці x_0, і значеннями похідних цих функцій (А–Д) у точці x_0.

1 $y = 0{,}25x^4 - 2$, $x_0 = -1$
2 $y = 2\cos x$, $x_0 = 0{,}5\pi$
3 $y = 2x^3 - 1{,}5x^2$, $x_0 = 1$
4 $y = 2\sqrt{x} - x$, $x_0 = 1$

А -2
Б 2
В -1
Г 0
Д 3

Знайдіть похідну добутку функції **(598, 599).**

598. а) $f(x) = x^3\cos x$; б) $f(x) = (2x - 1)\sin x$; в) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$.

599. а) $f(x) = x^3\sin x$; б) $f(x) = \sin x \cos x$; в) $y = x \cdot \sqrt{x}$.

Визначте двома способами похідну функції **(600, 601).**

600. а) $y = (1 - x)\sin x$; б) $y = (x + 3)\cos x$; в) $y = x(2 + \mathrm{ctg}\ x)$.

601. а) $y = (x^2 + 1)\cos x$; б) $y = \left(\sqrt{x} - 1\right)\sin x$; в) $y = \sqrt{x}\left(\mathrm{tg}\ x - 3\right)$.

Обчисліть **(602–604).**

602. $f'(0{,}5\pi)$, якщо: а) $f(x) = x^2 + x + \sin x$; б) $f(x) = x + x^2\sin x$.

603. $f'(\pi)$, якщо: а) $f(x) = 1 + x + \cos x$; б) $f(x) = x(1 + \cos x)$.

604. $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, якщо: а) $f(x) = x\cos x + \dfrac{x^2}{\pi}$; б) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x} - \dfrac{x^2}{3}$.

Знайдіть похідну частки **(605, 606)**.

605. а) $y=\dfrac{2}{x+1}$; б) $y=\dfrac{x-3}{x}$; в) $y=\dfrac{\cos x}{5x}$; г) $y=\dfrac{x^2}{5-x}$.

606. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x-3}$; б) $f(x)=\dfrac{5\sin x}{x^2-1}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x}$; г) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3}$.

607. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ в даних точках:

а) $f(x)=\dfrac{\cos(0,5\pi-x)}{\sin(1,5\pi-x)}-\pi x$, якщо $x_1=-\pi$; $x_2=\dfrac{\pi}{6}$; $x_3=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=\dfrac{\cos(\pi-x)}{\sin(2\pi-x)}+\dfrac{x^2}{\pi}$, якщо $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$; $x_2=\dfrac{\pi}{6}$; $x_3=\dfrac{\pi}{3}$.

608. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$; в) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

б) $y = \sin 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$; г) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 **(609, 610)**.

609. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $y = 4\mathrm{tg}\, x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

610. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \mathrm{tg}\, x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

611. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

а) $f(x) = x - 12x^3$; б) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 4$.

612. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; б) $f(x) = 12x - x^3$.

613. Залежність між витратами виробництва $Q(x)$ і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $Q(x) = 325x - 0,03x^3$ (грн). Знайдіть середні витрати на одиницю продукції $A(x)$ і граничні витрати $M(x)$, якщо $A(x)=\dfrac{Q(x)}{x}$, а $M(x) = Q'(x)$. Обчисліть $A(x)$ і $M(x)$ для обсягу продукції: а) 10 одиниць; б) 100 одиниць. Зробіть висновки.

Знайдіть похідну функції **(614–617)**.

614. а) $y = 5(1 - 2x)^7$; б) $y = (3 + x^2)^9$; в) $y = (2x + 1)^5$.

615. а) $y = \sin 4x$; в) $y = \mathrm{tg}\, 3x$; ґ) $y = \mathrm{ctg}\, 2x$;

б) $y=\sin\dfrac{x}{3}$; г) $y=\mathrm{tg}\dfrac{3x}{4}$; д) $y=\cos\dfrac{2x}{3}$.

616. а) $y = 2 + \sin 3x$; в) $y = x + \cos 8x$; ґ) $y = \cos x - \cos 2x$;

б) $y = 1 + \mathrm{tg}\, 3x$; г) $y = \sin x + \sin 2x$; д) $y = \mathrm{ctg}\, 5x$.

617. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\mathrm{tg}^3 x$; в) $y=\sqrt{\sin x}$; г) $y=\sqrt{\mathrm{tg}\, x}$.

Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 **(618, 619)**.

618. а) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; б) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$.

619. а) $y=\sqrt{25-9x}$, $x_0 = 1$; б) $y=\sqrt{7x+1}$, $x_0 = 5$.

Вправи для повторення

620. Побудуйте графік функції: а) $y = x^2$; б) $y = -2x^2$; в) $y = 2 + x^2$.

621. Електронна петиція (особлива форма колективного звернення громадян), адресована відповідно Президенту України, Верховній Раді України, Кабінету Міністрів України, розглядається за умови збору на її підтримку не менш як 25 000 підписів громадян протягом не більше трьох місяців з дня оприлюднення петиції. А для розгляду петиції у Київській міській раді петиція має отримати не менше 10 000 підписів протягом не більше 90 днів. За яких умов термін збору підписів на підтримку електронної петиції, адресованої Кабінету Міністрів України, перевищуватиме термін збору підписів на підтримку електронної петиції, адресованої Київській міській раді.

622. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$

Самостійна робота 4

Варіант 1

1 Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:

а) $y = \frac{1}{2}x - 3$; б) $y = -3x$; в) $y = 5x + 3$.

2 Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 5x^3$; б) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = x^2(x - 3)$.

3 Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 3x$ у точці з абсцисою $x = 5$.

4* Дано $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$. Обчисліть $f'(0)$, $f'(-2)$.

Варіант 2

1 Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0{,}5x$; в) $y = \frac{3}{2}x + 0{,}1$.

2 Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 3x^5$; б) $f(x) = x^2 + \cos x$; в) $f(x) = (x^2 - 1)x$.

3 Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x$ у точці з абсцисою $x = 3$.

4* Дано $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$. Обчисліть $f'(1)$, $f'(-2)$.

§ 17. Застосування похідної для дослідження функцій

За допомогою похідної можна досліджувати різні функції.

Дослідити функцію — означає виявити її властивості: вказати її область визначення й область значень, проміжки зростання і спадання, проміжки, на яких функція набуває додатних значень, а на яких — від'ємних, з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною тощо.

Для визначення проміжків зростання і спадання функції користуються такими твердженнями:

- *якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає;*
- *якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає;*
- *якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.*

Два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на другому спадає, можуть розділятися тільки такою точкою, у якій похідна функції дорівнює нулю або не існує.

> ! Внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками функції.**

Щоб визначити проміжки зростання чи спадання функції $f(x)$, треба розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ та $f'(x) < 0$ або знайти всі критичні точки функції, поділити ними область визначення функції на проміжки, а далі досліджувати, на яких проміжках функція зростає, а на яких — спадає.

Приклад 1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Розв'язання. $D(y) = R$. $y' = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Рівняння $3x(x - 2) = 0$ має корені: $x = 0$, $x = 2$. Це — критичні точки. Область визначення даної функції, тобто множину R, вони поділяють на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$. Похідна функції на цих проміжках має відповідно такі знаки: $+$, $-$, $+$. Дослідження зручно оформити у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

Як видно з таблиці, функція зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2)$.

Оскільки функція $y = x^3 - 3x^2 + 2$ — неперервна, то домовилися стверджувати, що вона зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; \infty)$, а спадає на проміжку $[0; 2]$.

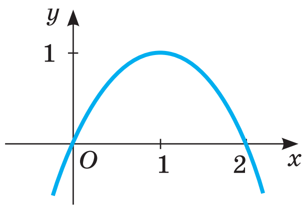
Важливу роль у дослідженні функції відіграють визначення її максимуму і мінімуму. Щоб з'ясувати, що це таке, введемо кілька нових понять.

Околом точки x_0 називають будь-який проміжок, для якого x_0 є внутрішньою точкою.

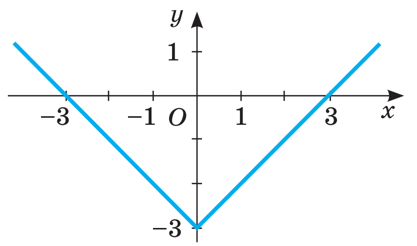
> Точку x_0 називають точкою **мінімуму** (або **максимуму**) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (або відповідно $f(x_0) > f(x)$). Значення функції в точці мінімуму називають **мінімумом функції**, а в точці максимуму — її **максимумом**. Позначають їх символами $y_{\min}$, $y_{\max}$.

Точки мінімуму і максимуму функції разом називають *точками екстремуму* (лат. *extremum* — край, кінець). Значення функції в точках її екстремуму — *екстремальні значення, або екстремуми*.

Наприклад, для функції $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ є точкою максимуму (мал. 121). Її максимум: $y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.



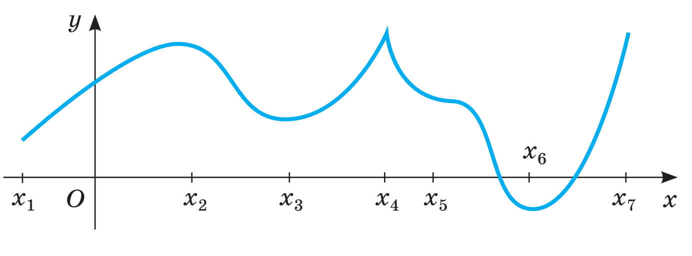
Мал. 121



Мал. 122

Для функції $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму (мал. 122). Її мінімум: $y_{\min} = 0 - 3 = -3$.

Функція, графік якої зображено на малюнку 123, має чотири точки екстремуму: x_2 і x_4 — точки максимуму; x_3, x_6 — точки мінімуму.



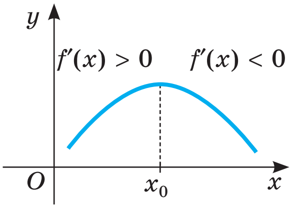
Мал. 123

Точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки. Це — *необхідна умова* існування екстремуму.

Точки екстремуму можна вибрати з критичних точок функції за наявності *достатньої умови* існування екстремуму.

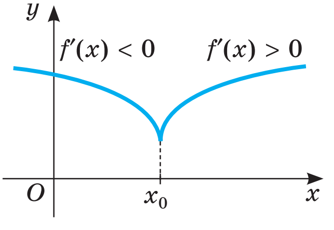
Нехай критична точка $x = a$ є внутрішньою точкою деякого інтервалу $(b; c)$ і такою, що на кожному з інтервалів $(b; a)$ та $(a; c)$ похідна функції існує і зберігає знак. Така критична точка, переходячи через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «+» на «–», є точкою *максимуму, а точка, переходячи через яку похідна змінює знак з «–» на «+», — точкою мінімуму.*

Справді, якщо, наприклад, похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a; x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0; b)$ — від'ємна, то, переходячи через точку x_0, функція змінює зростання на спадання (мал. 124). У цьому випадку x_0 — точка максимуму. Якщо ж під час переходу через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 — точка мінімуму (мал. 125).

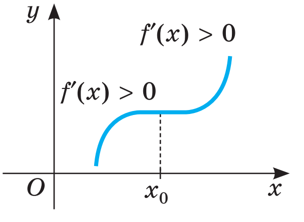


Мал. 124

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (мал. 126) або зліва і справа — від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму.



Мал. 125



Мал. 126

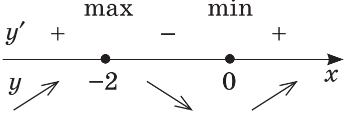
Приклад 2. Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

Розв'язання. $D(y) = R$. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критичними точками функції є: $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$. Ці точки розбивають область визначення функції на три проміжки. Визначимо знак похідної на кожному з них.

$y'(-3) = 6 \cdot (-3) \cdot (-3 + 2) = 18 > 0$; $y'(-1) = 6 \cdot (-1) \cdot (-1 + 2) = -6 < 0$;
$y'(1) = 6 \cdot 1 \cdot (1 + 2) = 18 > 0$.

У разі переходу через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому це — точка максимуму. Якщо відбувається перехід через точку $x_2 = 0$, похідна змінює знак з «–» на «+», тому це — точка мінімуму (мал. 127).



Мал. 127

Отже, $y_{max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3$; $y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5$.

Відповідь. $x_1 = -2$ — точка максимуму, $y_{max} = 3$; $x_2 = 0$ — точка мінімуму, $y_{min} = -5$.

Функцію можна дослідити, користуючись такою схемою:
- знайти область визначення функції;
- дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
- знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- дослідити функцію на монотонність, тобто знайти проміжки зростання і спадання функції;
- знайти точки екстремуму та екстремальні значення;
- побудувати графік функції.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Розв'язання. Область визначення функції — усі дійсні числа, крім $x=-1$. З такою областю визначення функція не може бути парною, непарною чи періодичною. Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критичні точки функції: $x_1=-3$; $x_2=1$. Вони розбивають числову вісь на чотири проміжки. Побудуємо на їх основі таблицю та з'ясуємо властивості заданої функції.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не існує	–	0	+
$f(x)$	↗	−6 max	↘	Не існує	↘	2 min	↗

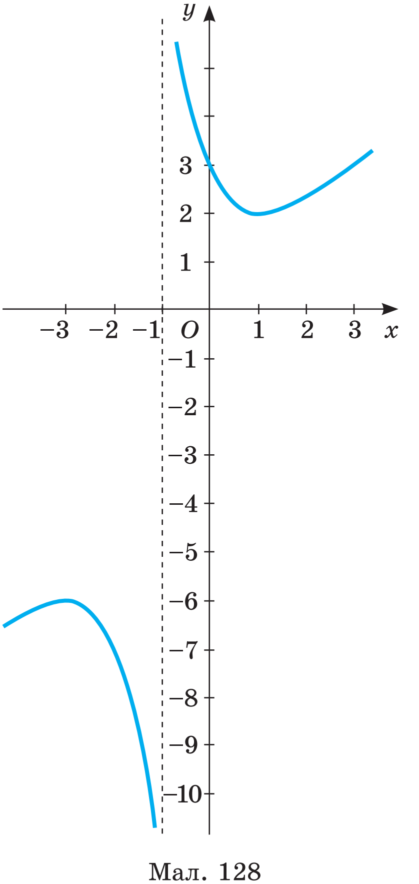
На проміжках $(-\infty;-3]$ і $[1;+\infty)$ функція зростає, а на проміжках $[-3;-1)$ і $(-1;1]$ — спадає.

Точка максимуму $x_1=-3$, $f(-3)=-6$; точка мінімуму $x_2=1$, $f(1)=2$.

Область значень функції:

$$(-\infty;-6)\cup(2;+\infty).$$

Рівняння $\dfrac{x^2+3}{x+1}=0$ не має розв'язків, тому графік функції не перетинає вісь x. Вісь y він перетинає в точці з ординатою $f(0)=3$. Графік цієї функції зображено на малюнку 128.



Мал. 128

Перевірте себе

1. Що називають критичними точками функції?
2. За якої умови функція зростає (спадає) на деякому проміжку?
3. Як визначити проміжки, на яких дана функція зростає або спадає?
4. Що називають точкою максимуму функції? А точкою мінімуму?
5. Що називають точками екстремуму? А екстремумами функції?
6. Що означає дослідити функцію?

Виконаємо разом

1) Знайдіть критичні точки функції $y=\dfrac{x^2}{x+2}$.

Розв'язання. $D(y)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)'=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Знайдемо точки, у яких похідна дорівнює нулю чи не існує:

$y'=0$, якщо $\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}=0$, звідки $x=0$ і $x=-4$;

y' не існує, якщо знаменник дорівнює нулю, звідки $x=-2$.
Точка $x=-2$ не входить до області визначення функції.
Отже, функція має дві критичні точки: $x=0$ і $x=-4$.

2) Установіть, на якому проміжку функція $y=-3x+\cos x$ зростає, а на якому — спадає.

Розв'язання. $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$y'=(-3x+\cos x)'=-3-\sin x$. Оскільки $|\sin x|\le 1$, то $y'<0$ для всіх дійсних x. Отже, функція $y=-3x+\cos x$ спадає на всій області визначення, тобто на множині R.

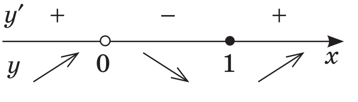
3) Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y=2x+x^{-2}$.

Розв'язання. $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$y'=(2x+x^{-2})'=2-2x^{-3}$.

Знайдемо критичні точки функції: $y'=0$, якщо $2-2x^{-3}=0$, або $2x^{-3}=2$, звідки $x=1$.

Точки 0 і 1 розбивають область визначення функції на три проміжки (мал. 129). Визначимо знак похідної на кожному з них.



Мал. 129

$y'(-1)=2+2=4>0$;
$y'(0{,}5)=2-16=-14<0$;
$y'(2)=2-0{,}25=1{,}75>0$.

Отже, функція $y=2x+x^{-2}$ зростає на проміжку $(-\infty;\ 0)$ і $(1;\ +\infty)$, а спадає на проміжку $(0;\ 1)$.

Оскільки в точці $x=1$ дана функція неперервна, то остаточно: функція $y=2x+x^{-2}$ зростає на проміжку $(-\infty;\ 0)$ і $[1\ +\infty)$, а спадає — на проміжку $(0;\ 1]$.

4) Дослідіть функцію $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. а) $D(y)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

б) Функція — непарна, оскільки $y(-x)=-\dfrac{x}{x^2-4}=-y(x)$.

Отже, її графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо дослідити функцію на проміжку $[0; 2)\cup(2; +\infty)$.

в) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$ — графік перетинає осі координат тільки в одній точці (0; 0).

г) Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = -\frac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

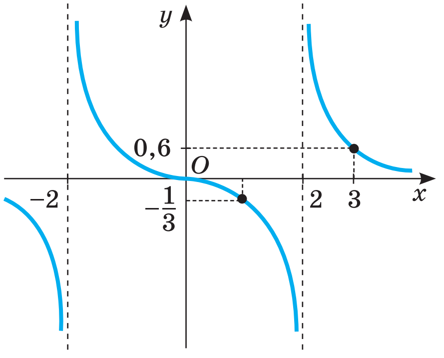
Очевидно, що $y' < 0$ для всіх x з області визначення.

Отже, функція не має максимумів і мінімумів, а спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ і $(2; +\infty)$.

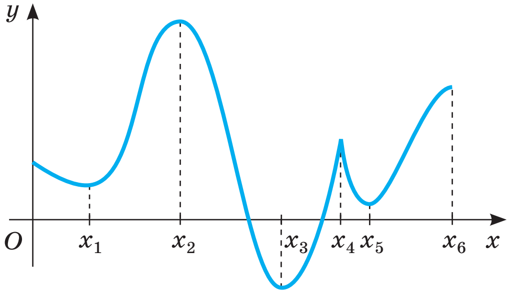
Для точнішої побудови обчислимо значення функції в кількох точках:

$y(1) = -\dfrac{1}{3}$; $y(1,5) = -\dfrac{6}{7}$; $y(3) = 0,6$; $y(4) = \dfrac{1}{3}$.

Графік функції подано на малюнку 130.



Мал. 130



Мал. 131

Виконайте усно

623. Знайдіть критичні точки функції:

а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^2 + 2x + 1$.

624. Яка з функцій зростає на всій області визначення:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = x^3$; в) $y = 1 - x$; г) $y = 0,5x$?

625. Яка з функцій спадає на всій області визначення:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -x^5$; в) $y = \cos x$; г) $y = -5x$?

626. Використовуючи малюнок 131, визначте:

а) критичні точки функції;

б) проміжки зростання і спадання;

в) точки максимуму і мінімуму.

627. Скільки точок екстремуму може мати функція $y = f(x)$, якщо $f(x)$ — многочлен третього, четвертого або п'ятого степеня?

А

Знайдіть критичні точки функції **(628, 629)**.

628. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; б) $f(x) = \cos 2x$.

629. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення **(630, 631)**.

630. а) $f(x) = x^3 + 3$; б) $f(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = 5 + x^{0,5}$.

631. а) $f(x) = x + 2,5$; б) $f(x) = x^5 - 3$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ спадає на всій області визначення **(632, 633)**.

632. а) $f(x) = 1 - x^3$; б) $f(x) = -4x + 3$; в) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

633. а) $f(x) = 1,5 - x$; б) $f(x) = -x^{0,5}$; в) $f(x) = 1 - x^5$.

634. Побудуйте графік неперервної функції, яка зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$, але спадає, якщо $x \in [-1; 3]$. Укажіть, яких значень набуває функція в критичних точках.

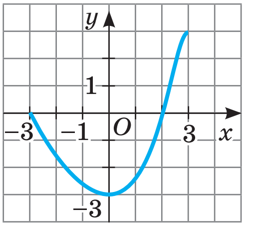
Знайдіть проміжки зростання і спадання функції **(635–637)**.

635. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 2x - x^2$.

636. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

637. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; б) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

638. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[-3; 3]$. Її графік зображено на малюнку 132. Установіть відповідність між властивостями функції $y = f(x)$ (1–4) і проміжками (А–Д), на яких ці властивості виконуються.



Мал. 132

1	Функція $y = f(x)$ зростає на проміжку	**А**	$[-3; 0]$
2	Функція $y = f(x)$ спадає на проміжку	**Б**	$[-3; 2]$
3	Функція $y = f(x)$ набуває додатних значень на проміжку	**В**	$(0; 1)$
4	Функція $y = f(x)$ набуває недодатних значень на проміжку	**Г**	$[0; 3]$
		Д	$(2; 3)$

639. Знайдіть точку мінімуму функції:
а) $y = x + x^2$; б) $y = x^2 - 6x - 3$; в) $y = 5x^2 - 4x$.

640. Знайдіть точку максимуму функції:
а) $y = 5 - x^2$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = x - 2x^2$.

641. Знайдіть точки екстремумів функції:
а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$; в) $y = -x^3 + 12x + 7$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції **(642–644)**.

642. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

643. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

644. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

645. **Практичне завдання.** Побудуйте графік неперервної функції, яка спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ та $[3; 5]$ і зростає на двох інших проміжках $[-1; 3]$ та $[5; +\infty)$. Врахуйте, що мінімальні значення цієї функції рівні між собою. Для побудованого графіка випишіть усі точки екстремуму та екстремальні значення функції.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік **(646, 647)**.

646. а) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$;
б) $f(x) = 4 + 5x - x^2$; г) $f(x) = 3x - x^3$.

647. а) $f(x) = 4x^2 - x^4$; в) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$;
б) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 5$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

Б

Знайдіть точки екстремумів функції **(648, 649)**.

648. а) $f(x) = \cos^2 x - \sin 2x$; б) $f(x) = 10\cos x - 5x$.

649. а) $f(x) = x - 2\cos x$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

Знайдіть точки екстремумів та екстремальні значення функції **(650, 651)**.

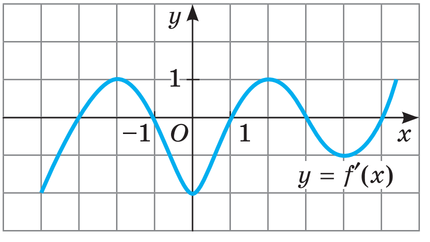
650. а) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

651. а) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; б) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

652. Доведіть, що не має екстремумів функція:
а) $f(x) = 2x + \sin x$;
б) $f(x) = -3x - \cos x$.

653. Доведіть, що функція $y = \mathrm{tg}\, x$ зростає, а $y = \mathrm{ctg}\, x$ — спадає на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

654. Функція $y = f(x)$ визначена на всій множині дійсних чисел. На малюнку 133 зображено графік функції $y = f'(x)$. Користуючись зображенням, укажіть:
а) проміжки, на яких функція $y = f(x)$ зростає;
б) проміжки, на яких функція $y = f(x)$ спадає;
в) точки максимуму функції $y = f(x)$;
г) точки мінімуму функції $y = f(x)$.



Мал. 133

Дослідіть функцію і побудуйте її графік **(655–657)**.

655. а) $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$; б) $f(x) = \frac{3x}{1 + x^2}$.

656. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; б) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

657. а) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$; б) $f(x) = x^2\sqrt{x + 2}$.

Вправи для повторення

658. На українських дорогах у 2016 році трапилося понад 138 тис. ДТП. Унаслідок цього загинуло 4 тис. громадян, ще понад 31 тисяча травмувалися. У 7 із 10 випадків ДТП були спричинені перевищенням швидкості. У половині випадків люди загинули через керування автомобілем у нетверезому стані, а в 4 із 10 випадків смерть була спричинена недбалістю й ігноруванням ременів безпеки. Встановіть, скільки громадян загинуло через недбалість та ігнорування ременів безпеки.

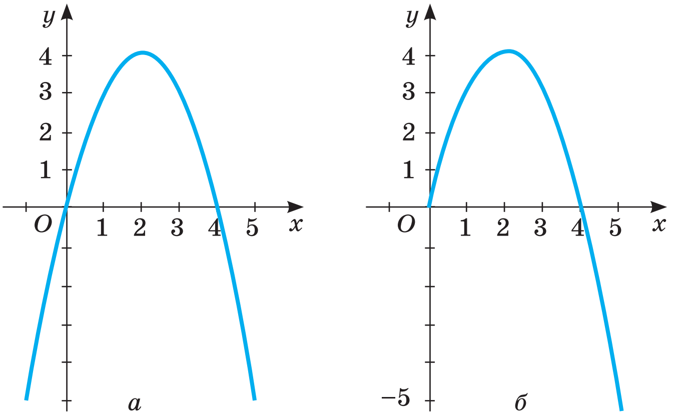
659. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

а) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; б) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^2}}$.

660. На фермі були гуси та кілька собак, які їх охороняли. Скільки гусей і скільки собак було на фермі, якщо разом вони мали 98 голів і 202 ноги?

§ 18. Найбільші та найменші значення функції

Не слід ототожнювати максимум і мінімум функції з її *найбільшим* або *найменшим значенням*. Під точкою максимуму (мінімуму) розуміють точку, у якій функція має найбільше (найменше) числове значення порівняно з її значеннями в усіх досить близьких від неї точках. А найбільше або найменше значення функції на відрізку може й не бути її максимумом або мінімумом. Наприклад, функція $f(x) = 4x - x^2$ має максимум у точці $x = 2$, а мінімуму не має (мал. 134, *а*). А от на проміжку $[0; 5]$ свого найменшого значення вона досягає в кінці проміжку: $f(5) = -5$, а найбільшого — у точці $x = 2$ (мал. 134, *б*).



Мал. 134

Функція може мати кілька максимумів (мінімумів) на деякому проміжку, але не більше одного найбільшого (найменшого) значення (див. мал. 131). Функція може не мати максимуму (мінімуму) на проміжку, але мати найбільше (найменше) значення.

> !
>
> Щоб знайти **найбільше** і **найменше** значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, треба обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях цього проміжку і в критичних точках, що належать йому, вибрати з них найбільше і найменше.

Приклад. На проміжку $[-4; 4]$ знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Критичні точки: $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$ належать проміжку $[-4; 4]$. Знайдемо значення функції на кінцях цього проміжку і в критичних точках.

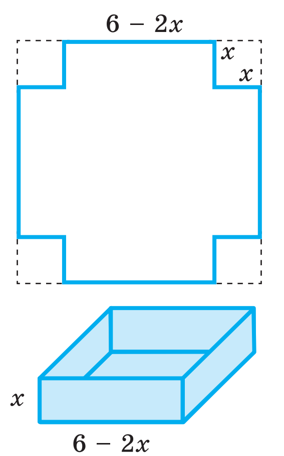
Маємо: $f(-4) = 10$; $f(-3) = 17$;
$f(1) = -15$ (найменше);
$f(4) = 66$ (найбільше).

Відповідь.
$\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 66$, $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -15$.

Найбільше і найменше значення функції тісно пов'язані з її областю значень. Якщо область значень неперервної функції — проміжок $[m; M]$, то m — найменше значення даної функції, а M — найбільше значення.

За допомогою похідної зручно розв'язувати *екстремальні задачі*, тобто такі, у яких потрібно визначити найбільше або найменше значення певної величини.

Задача. Маємо квадратний лист жерсті зі стороною 6 дм. Які квадрати треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку без кришки найбільшого об'єму (мал. 135)?



Мал. 135

Розв'язання. Щоб одержати коробку у формі прямокутного паралелепіпеда, у кутах листа треба вирізати рівні квадрати. Нехай x — довжина сторони такого квадрата. Тоді висота коробки дорівнюватиме x, а сторона її основи — $6 - 2x$. Об'єм коробки $V(x) = (6 - 2x)^2 \cdot x$ — функція від x. Зрозуміло, що число x додатне і менше за 3. Маємо математичну модель задачі: визначити, при якому значенні x функція $V(x) = (6 - 2x)^2 \cdot x$, задана на проміжку $(0; 3)$, набуває найбільшого значення.

Щоб розв'язати задачу, знайдемо похідну даної функції:
$V(x) = 36x - 24x^2 + 4x^3$; $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$.

Щоб знайти критичні точки функції, прирівняємо її похідну до нуля та розв'яжемо рівняння.

$12x^2 - 48x + 36 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Оскільки $x = 3$ не належить проміжку $(0; 3)$, то маємо одну критичну точку: $x = 1$.

Якщо $x < 1$, то $V'(x) > 0$, а якщо $x > 1$, то $V'(x) < 0$. Отже, найбільшого значення функція $V(x)$ набуває при $x = 1$.

Відповідь. Треба відрізати квадрати, сторони яких дорівнюють 1 дм.

Перевірте себе

1 Що називають найбільшим (найменшим) значенням функції на даному проміжку?

2 Чи те саме означають максимальне значення функції та її найбільше значення?

3 Як знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$?

Виконаємо разом

1) Знайдіть область значень функції $y = x^3 - 9x^2 - 7$, якщо $x \in [0; 10]$.

Розв'язання. $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$.

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$, якщо $3x^2 - 18x = 0$, або $3x(x - 6) = 0$, звідки $x = 0$, $x = 6$.

Знайдемо значення функції на кінцях проміжку $[0; 10]$ і в критичній точці $x = 6$: $y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

Задана функція неперервна; її найбільше значення — 93, а найменше — -115. Отже, область її значень — відрізок $[-115; 93]$.

2) Розкладіть число 100 на два доданки, добуток яких найбільший.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге — $100 - x$. Розглянемо функцію $y = x(100 - x)$ і визначимо, за яких значень x з проміжку $(0; 100)$ функція набуває найбільшого значення. Знайдемо похідну цієї функції, прирівняємо її до нуля та визначимо критичні точки:

$y' = (x(100 - x))' = (100x - x^2)' = 100 - 2x$; $100 - 2x = 0$; $x = 50$.

Якщо $x < 50$, то $y' > 0$, а якщо $x > 50$, то $y' < 0$. Отже, найбільшого значення функція $y = x(100 - x)$ досягає при $x = 50$.

Відповідь. $100 = 50 + 50$.

Виконайте усно

661. Чи має найбільше значення функція:

а) $y = x^3$;

б) $y = 1 - x^2$;

в) $y = \cos x$;

г) $y = 2x + 1$?

662. Укажіть найменше значення функції:

а) $y = x^4$; б) $y = \sin x$; в) $y=\sqrt{x}$; г) $y=|x|-1$.

663. Укажіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2$ на проміжку:

а) [0; 2]; б) [−1; 1]; в) [−2; 0]; г) [−5; 2].

664. Чи може значення функції в точці максимуму бути меншим за її значення в точці мінімуму?

665. Чи може найбільше значення функції бути меншим за її екстремум? А навпаки?

А

666. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x^3 - 1$ на проміжку:

а) [0; 2]; б) [−1; 1]; в) [−2; 0]; г) [−3; 3].

667. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x^2 - 2x$ на проміжку:

а) [−1; 0]; б) [−1; 1]; в) [−2; 0]; г) [0; 3].

Знайдіть найбільше і найменше значення функції **(668–670)**.

668. $f(x) = x^2 - 4x$ на проміжку [−3; 3].

669. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ на проміжку [−2; 2].

670. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на проміжку [−3; 1].

671. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

672. Знайдіть найбільший добуток двох чисел, сума яких дорівнює 64.

673. Доведіть, що коли сума двох додатних чисел стала, то їх добуток найбільший тоді, коли ці числа рівні.

674. Число 10 розділіть на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

675. Яке додатне число разом з оберненим дає найменшу суму?

676. Площа прямокутного загону для страусів дорівнює 40 000 м². Якими мають бути його розміри, щоб на огорожу пішло найменше сітки Рабиця?

677. Треба загородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною так, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

Б

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку **(678, 679)**.

678. а) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ на проміжку: 1) [−2; 1]; 2) [−1; 2];

б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на проміжку: 1) [0; 2]; 2) [−1; 5].

679. а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ на проміжку: 1) [−2; 2]; 2) [3; 4];

б) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ на проміжку: 1) [1; 3]; 2) [−4; −1].

680. Чи має найбільше або найменше значення на множині R функція:
а) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; б) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

Знайдіть область значень функції **(681, 682)**.

681. а) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; б) $y = 2 - x^2 - x^4$.

682. а) $y = \sqrt{4 - x - x^2}$; б) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

683. Довжина відрізка AB дорівнює 6, точка M — його середина. Знайдіть на відрізку AB таку точку X, щоб добуток довжин XA, XB, XM був найбільшим.

684. Який із прямокутників, уписаних у дане коло, має найбільшу площу? Розв'яжіть задачу двома способами.

685. Який із прямокутників, уписаних у дане коло, має найбільший периметр?

686. Якими мають бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 із квадратним дном і вертикальними стінами, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

Вправи для повторення

687. Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^3 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

688. У 2014 році населення Землі в якості сміття позбулося близько 41,8 млн тонн електронного та електричного обладнання (e-waste). Майже 15,5 % цього сміття було відправлено на переробку з метою вторинного використання. Серед е-сміття 5,3 % становлять небезпечні для екології матеріали з повільними періодами розпаду важких і шкідливих матеріалів — свинець, ртуть, кадмій, хром. Обчисліть: а) скільки тонн електронного сміття відправили на переробку; б) скільки тонн небезпечних матеріалів знайшли в е-смітті в 2014 році.

689. Катер пройшов відстань між двома пристанями за течією річки за 1,6 год, а на зворотну дорогу витратив 2 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

§ 19. Похідна як швидкість

Досі під похідною ми розуміли кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції (*геометричний зміст похідної*). Але похідну можна використовувати також для визначення швидкості проходження різних процесів — руху ракети, планети, літака, машини; обертання маховика, дзиґи, балерини; протікання хімічної реакції, нагрівання тіла; розмноження бактерій, росту рослин, тварин; зростання грошових доходів, витрат тощо.

Приклад. Нехай тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю. Відстань s, пройдена тілом за час t, — функція від t. Рівність $s = f(t)$ виражає закон руху цього тіла. Як, знаючи закон руху, визначити миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу t?

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло відстань $f(t + \Delta t) - f(t)$. Протягом цього часу воно рухалось із середньою швидкістю $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

Якщо $\Delta t \to 0$, то це відношення дедалі менше відрізняється від швидкості руху тіла в момент t. Отже, швидкість руху тіла в момент t

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

А це — похідна функції $s = f(t)$. Отже, *якщо відомий закон руху $s = f(t)$, то швидкість $v(t)$ цього руху в кожний момент t дорівнює похідній цієї функції:* $v(t) = f'(t)$.

Розглянемо конкретний приклад. Як відомо, вільне падіння тіла (якщо не враховувати опору повітря) відбувається за законом $s(t)=\dfrac{g}{2}t^2$ (тут $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення земного тяжіння). З якою швидкістю тіло падає в момент t після початку падіння?

Розв'язувати задачу можна так.

За час від t до $t+\Delta t$ тіло проходить відстань $\dfrac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\dfrac{g}{2}t^2=\dfrac{g}{2}(2t\Delta t+\Delta t)^2$ із середньою швидкістю $\dfrac{g}{2}(2t\Delta t+\Delta t)^2:\Delta t=\dfrac{g}{2}(2t+\Delta t)$. Якщо $\Delta t \to 0$, то $v(t)\to\dfrac{g}{2}(2t+0)$, тобто $v(t)=gt$. Дістали результат, добре відомий з фізики.

Так ми розв'язали задачу, не використовуючи поняття похідної. А знаючи, що швидкість руху — похідна функція, яка виражає закон цього руху, можна відразу записати:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{g}{2}t^2\right)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Так можна визначати не лише швидкість прямолінійного руху тіла, а й миттєві швидкості відбування багатьох процесів: хімічної реакції, радіоактивного розпаду, нагрівання тіла, танення криги, розмноження бактерій тощо. Взагалі, якщо який-небудь процес відбувається за законом $y = f(t)$, то швидкість відбування його в момент t можна знайти за формулою $v(t) = f'(t)$. Тому коротко говорять: *похідна — це швидкість*. Такий *фізичний зміст похідної*.

Швидкість руху може змінюватися. Швидкість зміни швидкості прямолінійного руху — його прискорення. Тому прискорення — це похідна від швидкості руху. Якщо, наприклад, швидкість руху тіла виражається формулою $v(t) = gt$, то його прискорення $a(t) = (gt)' = g$.

Розглянемо інший приклад. Якщо якийсь процес відбувається за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 8$, то його миттєва швидкість у момент часу t дорівнює $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а миттєве прискорення $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

За допомогою похідної розв'язують багато задач із різних галузей науки й практики. Наведемо приклади часто вживаних формул, які містять похідну:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ — кутова швидкість — похідна від кута повороту;
$a(t) = \omega'(t)$ — кутове прискорення — похідна від кутової швидкості;
$I(t) = q'(t)$ — сила струму — похідна від кількості електрики;
$N(t) = A'(t)$ — потужність — похідна від роботи;
$C(t) = Q'(t)$ — теплоємність — похідна від кількості теплоти;
$P(t) = V'(t)$ — продуктивність праці — похідна від обсягу продукції.

Перевірте себе

1. У чому полягає геометричний зміст похідної функції в точці?
2. У чому полягає фізичний зміст похідної функції в точці?
3. Як розуміти вислів «похідна — це швидкість»?

Виконаємо разом

1) Сигнальна ракета летить вертикально вгору так, що її рух описується законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (t — у секундах, s — у метрах). Знайдіть:
а) швидкість ракети через 5 с руху;
б) на яку максимальну висоту долетить ракета.

Розв'язання. а) Знайдемо швидкість ракети в будь-який момент часу як похідну від функції $v(t)$:
$v(t) = s'(t)$, або $v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t$.
Тоді $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (м/с).
б) Знайдемо точку екстремуму функції $s(t)$, розв'язавши рівняння $s'(t) = 0$, або $98 - 9{,}8t = 0$. Звідси $t = 10$ (с).
Якщо $t < 10$, то $s'(t) > 0$; якщо $t > 10$, то $s'(t) < 0$. Отже, $t = 10$ с — точка максимуму. Тоді $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (м).
Відповідь: а) 49 м/с; б) 490 м.

2) Кількість теплоти $Q(t)$, яка потрібна для нагрівання води масою 1 кг від 0 °C до температури $t°$ C ($0° \le t \le 95°$), наближено можна визначити за формулою $Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^3 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3$.
Установіть залежність теплоємності води $C(t)$ від температури.

Розв'язання. $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' = 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}t^2$.

3) Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$ (t — у секундах, x — у метрах). Знайдіть:
а) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху;
б) силу, що діє на тіло в цей час.

Розв'язання. а) Кінетична енергія тіла виражається формулою $E = \frac{mv^2}{2}$,
де m — маса тіла, а v — швидкість.
Знайдемо швидкість тіла в будь-який момент часу $v(t)$ і через 5 с після початку руху $v(5)$:
$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1$, $v(5) = 11$ (м/с).
Тоді $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (Дж).
б) Сила, що діє на рухоме тіло, визначається за формулою $F = ma$.
Знайдемо прискорення тіла в будь-який момент часу $a(t)$ і через 5 с після початку руху $a(5)$:
$a'(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2$ (м/с^2), $a(5) = 2$ (м/с^2).
Тоді $F = ma = 10 \cdot 2 = 20$ (Н).

Виконайте усно

690. Знайдіть миттєву швидкість тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах:
а) $s(t) = 5t^2 + t$;
б) $s(t) = 1 - 3t$;
в) $s(t) = t^2 - 1$;
г) $s(t) = 2t^3 + t$.

691. Знайдіть прискорення тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах:
а) $s(t) = t^2 + t$;
б) $s(t) = 1 - 3t^2$;
в) $s(t) = 5t - 1$;
г) $s(t) = 2t^3 + 5$.

692. Як залежить продуктивність праці молодого фахівця від тривалості роботи, якщо обсяг виготовленої ним продукції виражається формулою $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?

А

693. Визначте швидкість коливання тіла, що рухається за законом:
а) $x(t) = 10\cos \pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$.

694. Робота, яку виконує двигун автомобіля, визначається формулою: $A(t) - 15t^2 + 360$ ($A(t)$ — у Джоулях, t — у секундах). Яку потужність розвиває двигун?

695. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 100 + t^2$ (час t — у секундах, координата x — у метрах). Знайдіть швидкість v цієї точки в момент часу:
а) $t = 5$ с;
б) $t = 23$ с.

696. Точка рухається так, що шлях, пройдений нею за t секунд, виражається формулою $s = 4t^2 + 3t$. Знайдіть:
а) швидкість точки в будь-який момент часу;
б) прискорення точки в будь-який момент часу;
в) швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

697. Точка обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ (час t — у секундах, кут повороту $\varphi(t)$ — у радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки: а) у довільний момент t; б) у момент $t = 4$ с.

698. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 7t^3 - 5t$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент:
а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.

699. Маховик (махове колесо), затримуваний гальмом, обертається за законом $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (час t — у секундах, кут $\varphi(t)$ — у радіанах). У який момент він зупиниться?

700. Під час нагрівання тіла його температура T із часом змінюється за законом $T = 0{,}4t^2$, де T — температура в градусах, t — час у секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

Б

701. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m — маса кристалів у грамах, t — час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

702. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Яку відстань пройде тіло до моменту, коли його швидкість дорівнюватиме нулю?

703. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). У який момент часу тіло рухається з найбільшою швидкістю?

704. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x.

705. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

706. Обсяг продукції V майстерні, яка виготовляє ялинкові прикраси, протягом дня виражається залежністю $V(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$, де $t \in [1;\ 8]$. Обчисліть продуктивність праці майстерні протягом кожної години роботи.

707. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = 5\sqrt{2t + 5}$ (q вимірюється в кулонах, а t — у секундах). Знайдіть силу струму в момент часу $t = 10$ с.

708. Колесо обертається так, що кут його повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт воно зробило за 8 с. Знайдіть його кутову швидкість через 48 с після початку обертання.

709. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть:

а) миттєву швидкість тіла в моменти: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с;

б) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 2 г.

710. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть:

а) прискорення його руху в момент $t = 5$ с;

б) силу, що діє на тіло через 3 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 5 г.

711. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Коли його швидкість стане найбільшою? Визначте кінетичну енергію тіла в той момент, коли його швидкість стане найбільшою.

712. Тіло, підкинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 40$ м/с, рухається за законом $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де h — шлях у метрах, t — час у секундах, $g = 10$ м/с^2 — прискорення вільного падіння. Знайдіть:

а) швидкість тіла через 2 с після початку руху;

б) час, коли швидкість тіла дорівнює нулю;

в) найбільшу висоту, якої досягне тіло.

Вправи для повторення

713. Розкладіть многочлен на множники:

а) $x^6 + 2x^3 + 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$.

714. Знайдіть середнє арифметичне всіх цілих чисел x таких, що:

а) $10 \le x \le 50$; б) $-10 \le x \le 50$.

715. У магазині діє акція на осінню колекцію одягу — знижка 40 %. Скільки коштуватимуть: жіноча сукня, якщо її початкова ціна становить 850 грн, і чоловічий костюм, початкова ціна якого була вдвічі більша за сукню?

Самостійна робота 5

Варіант 1

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = x^3 + 3x^2$.
2. Дослідіть функцію $f(x) = 3x - x^3$ та побудуйте її графік.
3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 8t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

Варіант 2

1 Знайдіть критичні точки функції $f(x) = 3x^2 - x^3$.
2 Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x$ та побудуйте її графік.
3 Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

ТВОРЧІ ЗАВДАННЯ

1 Доберіть кілька висловлювань відомих математиків чи інших учених про диференціальне числення чи математичний аналіз.
2 Дізнайтеся, кого вважають творцями математичного аналізу. Підготуйте презентацію про пам'ятники цим математикам.
3 Пам'ятники яким математикам встановлено в Україні? Чи мають ці вчені праці, що стосуються математичного аналізу?
4 Дізнайтеся, в яких літературних творах згадується поняття похідної чи інших понять диференціального числення. Наведіть назви цих творів і відповідні цитати.
5 Підготуйте реферат на тему «Економічний зміст похідної».

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

✓ Розумію сутність понять:

- *Похідна функції* $f(x)$ у точці x_0 — границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ або } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Диференціювання — операція знаходження похідної функції.

✓ Знаю і вмію використовувати формули диференціювання.

$c' = 0$, c — const	$(ax + b)' = a$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in R$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\cos x)' = -\sin x$
$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

✓ Знаю і вмію використовувати правила диференціювання.

1. $(Cu)' = Cu'$;
2. $(kx^n)' = knx^{n-1}$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

✓ Умію знаходити похідну складеної функції

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u \cdot u'$.

✓ Усвідомлюю геометричний і фізичний зміст похідної.

- $v = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ — фізичний зміст похідної;
- $y' = k = \operatorname{tg}\alpha$ — геометричний зміст похідної.

✓ Умію знаходити рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

✓ Умію визначати проміжки зростання і спадання функції, користуючись твердженнями:

- якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає;
- якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає;
- якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.

✓ Умію застосовувати похідну для знаходження точок екстремуму функції:

- якщо критична точка $x = a$ є внутрішньою точкою деякого інтервалу $(b; c)$ і такою, що на кожному з інтервалів $(b; a)$ та $(a; c)$ похідна функції існує і зберігає знак, така критична точка, переходячи через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «+» на «–», є точкою максимуму, а точка, переходячи через яку похідна змінює знак з «–» на «+», — точкою мінімуму.

✓ Умію застосовувати похідну для знаходження найбільшого і найменшого значення функції та побудови графіків.

РОЗДІЛ 4.
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

CHAPTER 4.
PARALLEL LINES AND PLANES IN SPACE

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 20 Основні поняття стереометрії
Stereometry Basic Concepts

§ 21 Аксіоми стереометрії
Stereometry Axioms

§ 22 Наслідки з аксіом стереометрії
Stereometry Axioms Consequences

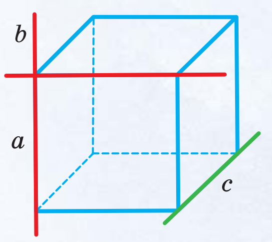
§ 23 Прямі у просторі
Straight Lines In Space

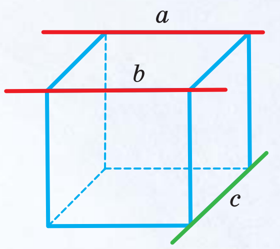
§ 24 Паралельне проектування
Parallel Projecting

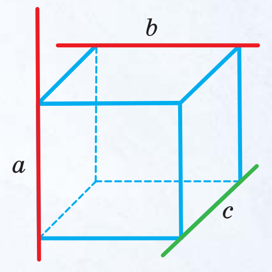
§ 25 Зображення фігур у стереометрії
Figures Image In Stereometry

§ 26 Паралельність прямої і площини
Straight Line and a Plane Parallelity

§ 27 Паралельність площин
Planes Parallelity







§ 20. Основні поняття стереометрії

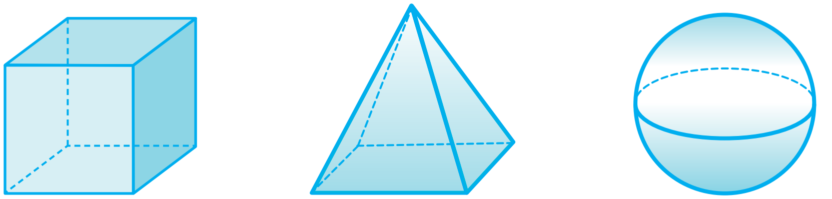
У 7–9-х класах вивчають першу частину геометрії — планіметрію. Другу частину геометрії називають *стереометрією* (грец. στερεοζ — просторовий). У стереометрії, як і в планіметрії, розглядають властивості геометричних фігур. Але — не тільки плоских. Нагадаємо, що *геометричною фігурою* називають будь-яку множину точок.

У стереометрії вивчають властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Приклади плоских фігур: відрізок, квадрат, коло (мал. 136). Властивості цих фігур ви вивчали в попередніх класах.

Мал. 136

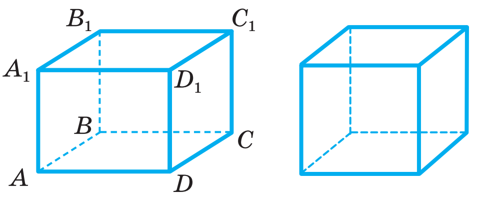
Фігуру називають неплоскою, якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: паралелепіпед, піраміда, куля (мал. 137).



Мал. 137

Паралелепіпед і піраміда — чудові моделі для аналізу взаємного розташування прямих і площин у просторі, тому коротко згадаємо деякі відомості про них, відомі вам із попередніх класів.

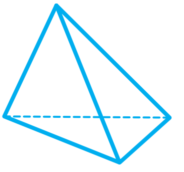
Паралелепіпед має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин (мал. 138). Усі грані паралелепіпеда — паралелограми. Якщо всі грані паралелепіпеда — прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Окремий вид прямокутного паралелепіпеда — куб. Усі грані куба —



Мал. 138

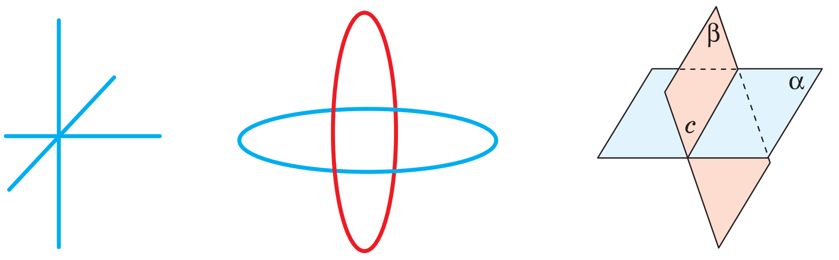
рівні квадрати. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основа — $ABCD$, а бічні ребра — AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Тетраедр — інакша назва трикутної піраміди — має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 139). Кожна грань тетраедра — трикутник. Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають *правильним тетраедром*.



Мал. 139

Перераховані вище фігури — *геометричні тіла*. Кожна з них має об'єм. Однак існують неплоскі геометричні фігури, які не є тілами. Наприклад, об'єднання: трьох попарно перпендикулярних прямих, що мають спільну точку; двох різних кіл; двох площин, що перетинаються, — фігури неплоскі (мал. 140). Ці фігури об'ємів не мають.



а *б* *в*

Мал. 140

У стереометрії розглядають багато різних геометричних понять:

- *геометричні фігури* (множини точок);
- *геометричні величини* (довжини, площі, об'єми, міри кутів);
- *геометричні перетворення* (паралельні перенесення, різні види симетрії, повороти тощо);
- *геометричні відношення* (перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо).

Зміст того чи іншого геометричного поняття звичайно розкривають за допомогою означення.

В означенні означуване поняття зводять до інших понять, уже відомих. Наприклад, формулюючи означення: «паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник».

А під які геометричні поняття можна підвести такі поняття геометрії, як «точка», «пряма», «площина»? Оскільки на початку курсу ще немає «відомих понять», то їх уводять без означень і називають *основними*, або *неозначуваними поняттями*.

У нашому підручнику неозначуваними вважаються поняття: *точка, пряма, площина* і відношення: *належить, не належить, лежить між, перетинаються* та деякі інші.

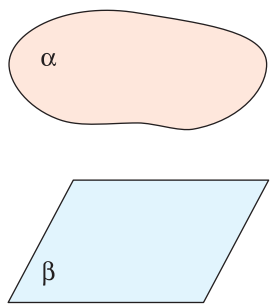
У стереометрії важливу роль відіграє поняття «площина». Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня шибки, дзеркала, відполірованого стола, гладінь ставка тощо. Уявлення про частину площини можна отримати, дивлячись на гладеньку поверхню озера, злітні смуги аеропорту чи футбольне поле (мал. 141).

Озеро Синевир | Злітні смуги аеропорту Бориспіль | Футбольне поле стадіону «Металіст» у Харкові

Мал. 141

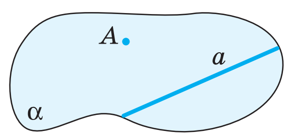
Зрозуміло, що це — лише матеріальні моделі, до того ж не всієї площини, а тільки незначної її частини. У геометрії площину мислять необмеженою, ідеально гладенькою, без будь-якої товщини.

Зображають площини на малюнках у вигляді паралелограмів, еліпсів або довільних замкнених областей (мал. 142). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ, δ, ω тощо. Як і будь-яка геометрична фігура, площина є деякою множиною точок. Якщо A — точка площини α, кажуть, *що точка A лежить у площині α, а площина α проходить через точку A*. Записують: $A \in \alpha$. Запис $B \notin \omega$ означає, що точка B не лежить у площині ω.



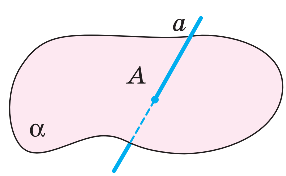
Мал. 142

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що *пряма a лежить у площині α, а площина α проходить через пряму a*. Записують: $a \subset \alpha$. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b не лежить у площині α. На малюнку 143 зображено площину α, яка проходить через пряму a і точку A.



Мал. 143

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, кажуть, що вони *перетинаються в точці A*. Записують: $a \cap \alpha = A$. На відповідному малюнку невидиму частину прямої (за площиною) зображають штриховою лінією (мал. 144).



Мал. 144

Якщо через пряму c проходять дві різні площини α і β, кажуть, що ці площини *перетинаються по прямій c*. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (див. мал. 140, *в*).

Запис $a \cap \alpha = \varnothing$ означає, що пряма a і площина α не мають спільних точок. $\varnothing$ — знак *порожньої множини*.

Перевірте себе

1. Поясніть значення слів «планіметрія» і «стереометрія».
2. Які фігури називають неплоскими?
3. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
4. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина, простір.
5. Що означають записи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$?
6. Що означають записи: $a \subset \alpha$, $a \not\subset \beta$, $a \cap \alpha = A$; $\alpha \cap \beta = \varnothing$?

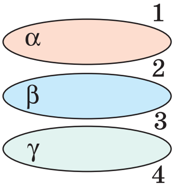
Виконаємо разом

1) Дано пряму c і площину ω. Яким може бути $c \cap \omega$?

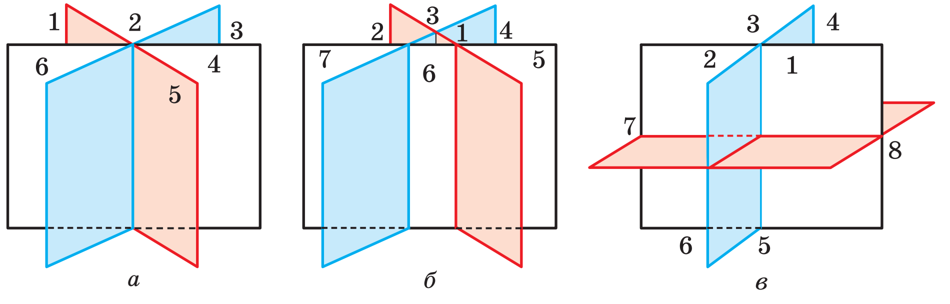
Розв'язання. Якщо пряма c не має спільних точок з площиною ω, то $c \cap \omega = \varnothing$.
Якщо пряма c перетинає площину ω у точці A, то $c \cap \omega = A$.
Якщо пряма c лежить у площині ω, то $c \cap \omega = c$.

2) На скільки частин можуть поділити простір три різні площини?

Розв'язання. Якщо жодні дві з трьох даних площин не мають спільних точок (мал. 145), то вони поділяють простір на 4 частини. В інших випадках три площини можуть ділити простір на 6, 7 чи 8 частин (мал. 146).



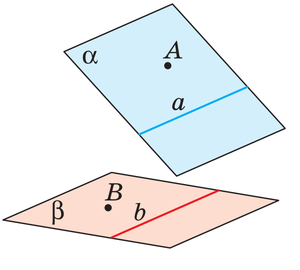
Мал. 145



Мал. 146

3) Чи правильні записи: а) $a \in \alpha$; б) $A \in \alpha$; в) $b \in \beta$; г) $B \subset \beta$ (мал. 147)?

Розв'язання. б) — Правильно; а), в), г) — ні. Слід писати: а) $a \subset \alpha$, в) $b \subset \beta$, г) $B \in \beta$.



Мал. 147

4) На прямій дано 27 різних точок. На скільки частин вони ділять пряму?

Розв'язання. Одна внутрішня точка ділить пряму, промінь чи відрізок на 2 частини, дві точки — на 3 частини і т. д. Зі збільшенням на одиницю числа точок на прямій збільшується на одиницю і кількість частин прямої. Отже, 27 різних точок прямої ділять її на 28 частин. Дві з цих частин — промені, а решта — відрізки.

Виконайте усно

716. Чи є геометричними фігурами точка, пряма, площина, простір?

717. Які із зазначених фігур неплоскі: відрізок, коло, куля, прямокутний паралелепіпед, прямокутний трикутник?

718. Чим різняться поняття «площина» і «площа»?

719. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі частин: а) прямих; б) площин.

720. Скільки спільних точок можуть мати:
а) дві прямі; б) пряма і площина; в) дві площини?

721. Провідміняйте слова «простір», «стереометрія».

А

722. Зобразіть площину α і точку M, що лежить в α. Запишіть це за допомогою символів.

723. Зобразіть площину β, що проходить через пряму c. Запишіть це за допомогою символів.

724. Зобразіть площину γ і пряму x, які перетинаються в точці M. Скільки точок прямої x лежить у площині γ?

725. Зобразіть площини α і ω, які перетинаються по прямій m.

726. Зобразіть на малюнку пряму b, яка перетинає площину γ в точці P, і точку M таку, що $M \in \gamma$.

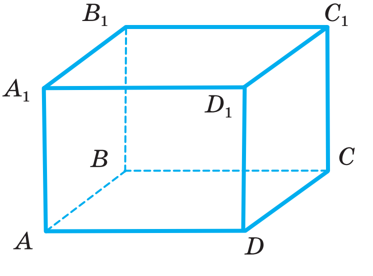
727. Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c, і точку M, таку, що $M \in \beta$ і $M \in \gamma$.

728. Зобразіть куб. Чи є грань куба площиною? А частиною площини?

729. Скільки спільних точок можуть мати:
а) пряма і відрізок; б) коло і площина?

730. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і коло, два кола? Зобразіть на малюнку.

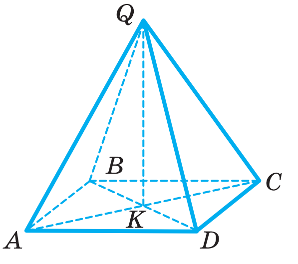
731. На малюнку 148 зображений прямокутний паралелепіпед. Замість пропусків поставте знаки $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, щоб стали правильними співвідношення $B \square (A_1AD)$, $D_1 \square (A_1AD)$, $BB_1 \square A_1AB$, $C_1D_1 \square B_1C_1CB$.



Мал. 148

732. На малюнку 149 зображена чотирикутна піраміда. Встановіть відповідність між відрізками (1–3) і площинами, у яких ці відрізки лежать (А–Г).

1	AB	**А**	DQC
2	DQ	**Б**	ACQ
3	AC	**В**	BQC
		Г	QBA



Мал. 149

733. Накресліть прямокутний паралелепіпед. Позначте його вершини. Запишіть його ребра: а) видимі; б) невидимі. Запишіть його грані: а) видимі; б) невидимі.

734. Накресліть правильний тетраедр. Позначте його вершини. Запишіть його ребра: а) видимі; б) невидимі. Запишіть його грані: а) видимі; б) невидимі.

Б

735. Зобразіть на малюнку площини α і β, пряму a і точку A, якщо $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in a$.

736. Зобразіть на малюнку площини α, β, пряму a і точку A, якщо $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$.

737. Зобразіть на малюнку відношення:
а) $a \cap \alpha = A$; б) $\alpha \cap \beta = c$; в) $a \cap \alpha = \varnothing$.

738. Зобразіть на площині α дві паралельні прямі. На скільки частин вони розділяють її. Як би ви їх назвали? Чи є серед них рівні?

739. Зобразіть дві площини, які не мають спільних точок. На скільки частин вони розділяють простір? Як би ви назвали такі частини простору?

740. На скільки частин можуть розділити простір дві площини?

741. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть кольором площину α, яка проходить через вершини A, B і C_1. Які з вершин куба належать площині α, а які — не належать? Які з прямих, на яких лежать ребра куба, перетинають площину α, а які не перетинають її?

742. Накресліть тетраедр $ABCD$ і зафарбуйте площину α, яка проходить через ребро AB і точку D. Які з вершин тетраедра належать площині α, а які не належать? Які ребра тетраедра перетинають площину α?

743. Як можуть розташовуватися пряма і трикутник на площині? А в просторі? Покажіть на малюнках.

744. Дослідіть, як можуть бути розташовані в просторі два трикутники. Зобразіть кілька випадків на малюнках.

745. Чи може перетином двох трикутників у просторі бути трикутник, чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник? Покажіть на малюнках.

746. **Практичне завдання.** За допомогою одного з програмних засобів навчального призначення GRAN 3D, GeoGebra чи інших спробуйте побудувати тетраедр і куб.

Вправи для повторення

747. Скільки різних прямих можна провести через одну точку? А через дві? Чи завжди можна провести пряму через три точки? Відповіді зобразіть за допомогою малюнків.

748. Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два трикутники, площі яких рівні.

749. На марках (мал. 150) зображено дві картини художниці Марії Примаченко «Гороховий звір» і «Дикий чаплун». Оригінали цих картин мають розміри 74×85 см і 62×85 см. Знайдіть наближено:

1) площу кожної картини у м^2 (відповідь округліть до сотих);
2) на скільки м^2 площа картини «Гороховий звір» перевищує площу картини «Дикий чаплун».

Дізнайтеся більше про життя і творчість народної художниці. Зверніть увагу на те, що її «Звірина серія» — явище унікальне і не має аналогів ні у вітчизняному, ні у світовому мистецтві.

Мал. 150

750. Зобразіть прямокутний паралелепіпед. Випишіть по дві пари його ребер, які лежать на:

а) паралельних прямих; б) перпендикулярних прямих.

§ 21. Аксіоми стереометрії

Як і в планіметрії, у стереометрії важливу роль відіграють поняття і твердження.

Властивості понять розкривають за допомогою певних тверджень. В істинності математичних тверджень переконуються за допомогою доведень.

Твердження, які доводять, називають **теоремами**. Не кожне геометричне твердження можна довести. Адже коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх ще немає. Тому кілька перших тверджень приймають без доведення, їх називають **аксіомами**. За допомогою аксіом розкривають властивості неозначуваних понять.

За геометричні аксіоми зазвичай приймають твердження, які відповідають формам і відношенням, що спостерігаються в матеріальному світі. В істинності цих тверджень люди переконалися в результаті багатовікової практичної діяльності.

Вперше про необхідність використання аксіом у геометрії ви дізналися в 7-му класі, коли вивчали планіметрію та її аксіоми. Пригадайте їх.

У планіметрії за універсальну множину точок служить *площина*. У стереометрії універсальною множиною точок є *простір* (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин.

Планіметричні аксіоми, які розглядалися в 7–9-х класах, правильні для будь-якої площини, як би вона не була розташована в просторі. Але для стереометрії одних цих аксіом недостатньо. Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

C_1. У просторі існує принаймні одна площина і точка, яка їй не належить.

C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

C_3. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

C_4. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Зауваження. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_4 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_2 слова «яка проходить через цю точку» необов'язкові. Але так сформульованою аксіомою зручніше користуватися.

Площину, яка проходить через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, позначають: (ABC). Системи неозначуваних понять і аксіом можуть бути різними для окремих курсів геометрії. Строгі наукові курси геометрії будують за такою схемою. Спочатку називають неозначувані поняття і формулюють аксіоми. Після того за допомогою означень поступово вводять інші поняття (і відношення) і доводять інші важливіші твердження. Такий виклад геометрії називають *аксіоматичним*.

Перевірте себе

1. Наведіть приклади геометричних понять.
2. Які неозначувані поняття ви знаєте?
3. Наведіть приклад геометричного твердження.
4. Що називають аксіомою?
5. Сформулюйте аксіоми стереометрії.

Виконаємо разом

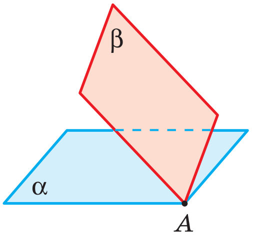
1) Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Розв'язання. Нехай A і B — дві довільні точки простору. Через них і будь-яку третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a.

Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Таким чином, через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить аксіомі планіметрії. Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

2) Площини α і β мають спільну точку A (мал. 151). Чи мають вони ще інші спільні точки?

Розв'язання. Згідно з аксіомою C_2 такі площини перетинаються по прямій. Отже, площини α і β мають безліч спільних точок. Усі вони лежать на прямій, що проходить через точку A.



Мал. 151

Виконайте усно

751. Скільки різних площин можна провести через дану точку? А через дві дані точки? А через три?

752. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? А через чотири точки однієї прямої?

753. Чому замкнені двері нерухомі, а незамкнені — легко відчинити?

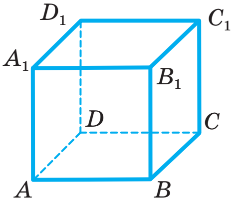
754. Чи можуть пряма і площина мати тільки одну спільну точку? А тільки дві спільні точки?

755. Точка A належить площині α, а точка B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB?

756. Дві різні точки відрізка не належать площині. Чи може яка-небудь точка відрізка лежати в цій площині?

757. Чому дітям безпечніше їздити на триколісному велосипеді?

А



Мал. 152

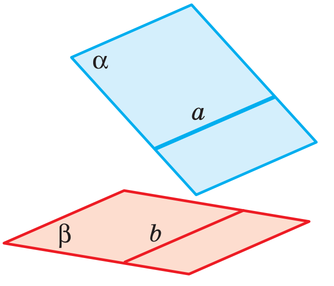
758. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 152). Чи в одній площині лежать точки A, B, C і D_1? А точки A, B, C_1 і D_1?

759. Використовуючи малюнок 152, заповніть пропуски знаками $\in$, $\notin$ $\subset$, щоб стали правильними співвідношення.

D_1 ☐ (BB_1C_1) BB_1 ☐ (AA_1B_1) B ☐ (B_1C_1C) C ☐ CC_1

760. ***Задача-жарт.*** Три бджоли розлетілися в різні боки. За яких умов усі вони будуть в одній площині? Обґрунтуйте.

761. Пряма a лежить у площині α, а пряма b — у площині β (мал. 153). Чи випливає з цього, що прямі a і b не лежать на одній площині?



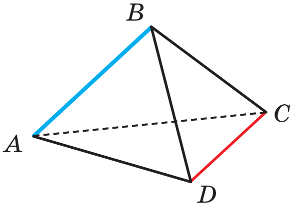
Мал. 153

762. Пряма a проходить через точку A на площині α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?

763. Запишіть за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 153.

764. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:
а) По яких прямих перетинаються площини:
1) (ABC) і (AA_1D_1); 2) (AA_1B_1) і (ADD_1); 3) (BB_1C_1) і (CC_1D_1)?
б) Яким площинам належать точки: 1) A; 2) C_1; 3) D?
в) Чи належить точка B_1 площині:
1) (ABC); 2) (DD_1C_1); 3) $(A_1D_1C_1)$?

765. На малюнку 154 зображено тетраедр $ABCD$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:
а) По якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD)?
б) Якій площині не належить точка B?
в) Яким площинам належить пряма AC?



Мал. 154

766. Чи існують 4 точки, які належать одній площині? А які не належать одній площині? Покажіть їх на зображенні:
а) куба; б) тетраедра.

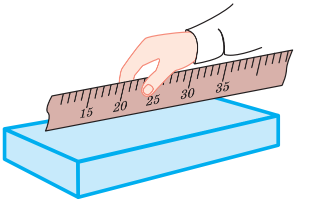
767. Оберіть правильні твердження:
а) будь-які дві різні точки завжди лежать в одній площині;
б) будь-які три різні точки завжди лежать в одній площині;
в) будь-які дві різні точки завжди лежать на одній прямій;
г) будь-які три різні точки завжди лежать на одній прямій.

768. Оберіть неправильні твердження:
а) пряма і площина можуть мати одну спільну точку;
б) пряма і площина можуть мати три спільні точки;
в) пряма і площина можуть не мати спільної точки;
г) пряма і площина можуть мати тільки дві спільні точки.

769. Дві різні площини α і β проходять через точки M, N і K. Зобразіть це на малюнку. Як розташовані точки M, N і K?

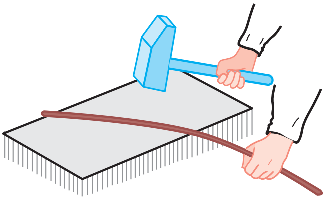
770. Три промені PA, PB і PC не лежать в одній площині. Доведіть, що точки A, B і C лежать в одній площині.

771. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і дивляться, чи немає зазору між ними (мал. 155). У яких випадках кажуть, що поверхня «неплоска»? Якими математичними твердженнями обґрунтовуються такі операції?



Мал. 155

772. Якщо тільки деякі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком, як показано на малюнку 156. При цьому дріт перевертають. Навіщо? Обґрунтуйте ці операції математичними твердженнями.


Мал. 156

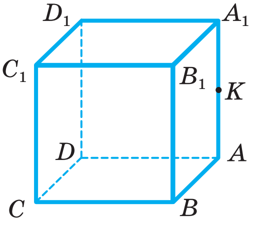
Б

773. Прямі MA, MB і MC перетинають площину α в точках A, B і C. За якої умови точки A, B і C: а) лежать на одній прямій; б) не лежать на одній прямій?

774. Точки A і B лежать у площині α, а точка C — поза нею. Зобразіть площину, у якій лежать усі три точки.

775. На малюнку 157 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1. Чи належить грані BB_1C_1C точка D? Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?

776. Дві суміжні вершини і точка перетину діагоналей паралелограма лежать у площині γ. Чи лежать у цій площині інші його вершини? Відповідь обґрунтуйте.



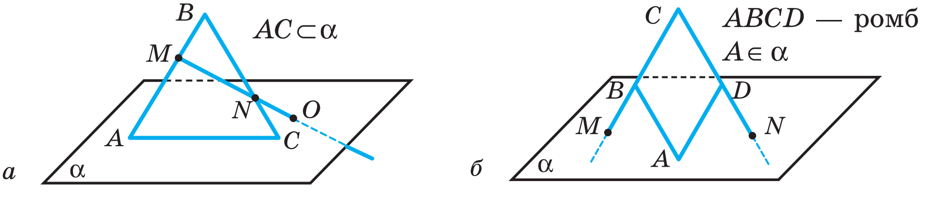
Мал. 157

777. Дві вершини і точка перетину діагоналей ромба лежать у площині γ. Чи лежать у цій площині інші вершини ромба? Зобразіть на малюнку можливі випадки.

778. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

779. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка $\triangle ABC$ лежить у площині α?

780. Укажіть помилку на малюнку 158. Обґрунтуйте.



Мал. 158

781. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка K — середина ребра AA_1. Побудуйте точку перетину:
а) прямої DK з прямою A_1D_1;
б) прямої D_1K з площиною (ABC);
в) прямої BK з площиною $(B_1C_1D_1)$.

782. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$ і площину α, яка проходить через ребро AB і точку K — середину ребра CD. Які з вершин даної піраміди належать площині α, які — не належать?

783. **Практичне завдання.** 1. Зробіть із дроту триногу і перевірте її стійкість, якщо всі її «ноги» мають:
а) однакові довжини; б) різні довжини.
Зробіть аналогічну конструкцію із 4 дротиків. Перевірте її стійкість, якщо всі її «ноги» мають:
а) однакові довжини; б) різні довжини.
2. Розгляньте малюнок 159. Поясніть, чому для здійснення фотозйомки в студії і геодезичної зйомки місцевості використовують триноги.

Мал. 159

Вправи для повторення

784. Знайдіть середню лінію рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює 36 см.

785. Зобразіть прямокутний паралелепіпед і позначте його вершини. Випишіть ребра, які лежать у його:
а) нижній основі; б) верхній основі.

786. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 3 см і 10 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть периметр паралелограма.

§ 22. Наслідки з аксіом стереометрії

Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії (див. с. 162).

У просторі існує нескінченна множина точок. Адже простір містить площину (розуміється: принаймні одну), а множина точок площини нескінченна.

З аксіом C_1 і C_2 випливає, що в просторі *існує нескінченна множина різних площин*. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, усі відомі з планіметрії фігури є і в просторі. Причому відстань між двома точками у просторі не залежить від того, у якій площині ці точки знаходяться.

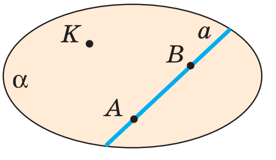
Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

ТЕОРЕМА 1

Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 160). Позначимо на прямій a довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_4). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві різні площини. Останнє суперечить аксіомі C_4. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину. □



Мал. 160

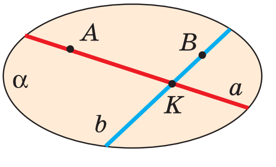
ТЕОРЕМА 2

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведіть цю теорему самостійно, скориставшись малюнком 161.

З аксіоми C_4 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.



Мал. 161

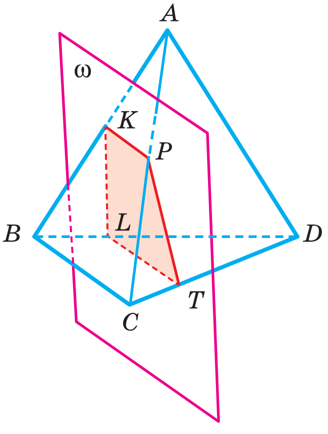
Якщо врахувати, що й кожні дві паралельні прямі лежать в одній площині, то можна дійти таких висновків. Площину однозначно визначають:

а) три точки, які не лежать на одній прямій;
б) дві прямі, які перетинаються;
в) пряма і точка, що не лежить на цій прямій;
г) дві паралельні прямі.

Розглянуті способи задання площини часто використовують під час побудови перерізів многогранників.

Що таке *переріз многогранника*?

Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то кажуть, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від деякої площини ω, кажуть, що площина ω перетинає многогранник. У цьому разі площину ω називають **січною площиною**.



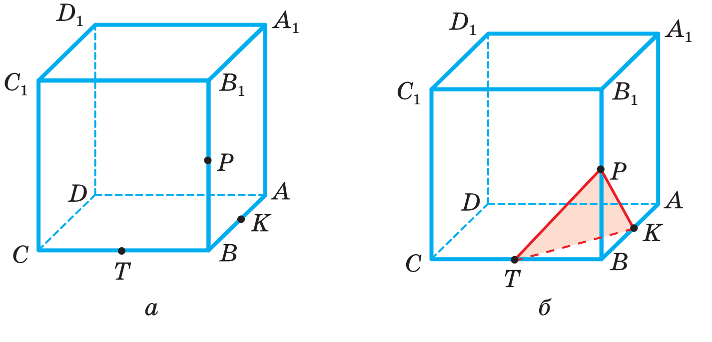
Мал. 162

> **!** Фігуру, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називають **перерізом многогранника** даною площиною.

На малюнку 162 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω, їх переріз — чотирикутник $KPTL$.

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій, прямою і точкою і т. ін.

Приклад. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T — середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 163, *а*).



Мал. 163

Розв'язання. Точки K, P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 163, *б*).

Іноді в задачі вимагається не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати і розміри даного многогранника. Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба дорівнює a, то $BK = BP = BT = \frac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Отже, площа знайденого перерізу

$$S = \frac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Перевірте себе

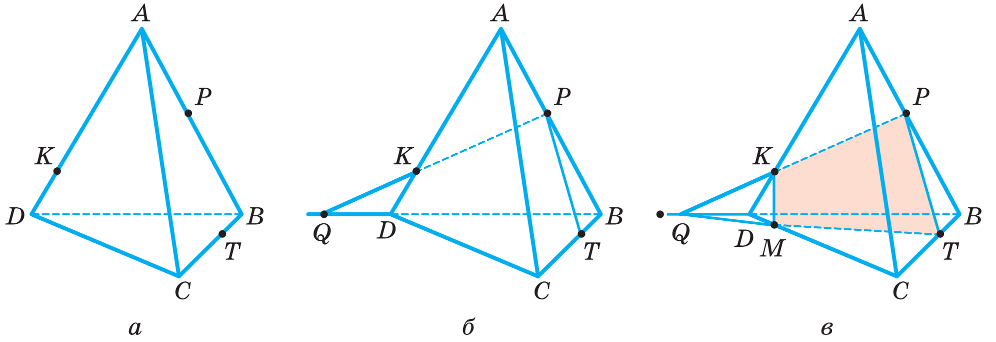
1. Скільки точок, прямих і площин існує в просторі?
2. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.
3. Як можна задати площину?
4. Що називають січною площиною?
5. Що називають перерізом многогранника?

Виконаємо разом

1) Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

Розв'язання. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину (згідно з доведеною теоремою 1). У цій площині лежать усі чотири дані точки, що суперечить умові задачі. Отже, припущення приводить до суперечності. Тому ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

2) На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 164, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.



Мал. 164

Розв'язання. Проводимо відрізки KP і PT. Щоб побудувати інші сторони перерізу, знайдемо точку, у якій січна площина (KPT) перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині (ABD) і не паралельні, отже, перетинаються в деякій точці Q (мал. 164, *б*). Точка Q належить площинам (KPT) і (BCD). І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі і точка M, у якій перетинаються прямі CD і QT. Визначивши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ — шуканий переріз (мал. 164, *в*).

Виконайте усно

787. Скільки існує різних площин, які містять задані пряму m і точку M, якщо: а) $M \in m$; б) $M \notin m$?

788. З поданих нижче тверджень оберіть правильні:
а) якщо прямі лежать в одній площині, то вони перетинаються;
б) якщо прямі перетинаються, то вони лежать в одній площині;
в) будь-які дві прямі завжди лежать в одній площині;
г) якщо прямі лежать в різних площинах, то вони не перетинаються;
ґ) якщо прямі не лежать в одній площині, то вони не перетинаються.

789. Прямі a і b не перетинаються. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

790. Чи перетинає відрізок AB площину, якщо її перетинає пряма AB?

791. Чи може бути перерізом куба рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

А

792. Як провести площину через три точки, які лежать на одній прямій?

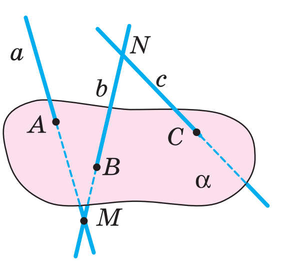
793. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо:
а) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?

794. Точка M не лежить у площині прямокутного трикутника. Скільки площин можна провести через цю точку і:
а) гіпотенузу трикутника;
б) катет трикутника;
в) один із катетів і гіпотенузу?

795. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD перетинатися? А прямі AC і BD?

796. Прямі KL і MN не лежать в одній площині. Чи можуть прямі KM і LN перетинатися? А прямі LM і KM?

797. Чи лежать прямі a, b і c, зображені на малюнку 165, в одній площині?

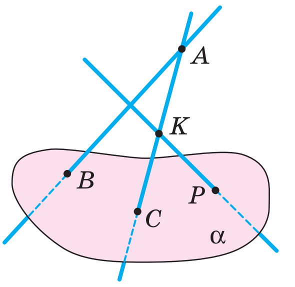


Мал. 165

798. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α у точках B, C і P, як показано на малюнку 166. Чи перетинаються прямі AB і KP?

799. Відрізки AB і AC перетинають площину α. Чи перетинає її відрізок BC? А пряма BC?

800. Проведіть переріз через середини трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини. Якою фігурою є такий переріз? Знайдіть його периметр, якщо діагональ куба дорівнює 8 см.



Мал. 166

801. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середини трьох бічних ребер куба. Знайдіть периметр утвореної фігури, якщо ребро куба дорівнює 10 см.

802. Точка K — середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

803. Точка M — середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

804. $ABCD$ — тетраедр. Точки K і M — середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).

805. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

Б

806. Точки K, B, M, N не лежать в одній площині. Скільки існує площин, які проходять через три з них?

807. Чотири точки є вершинами деякого куба. Скільки існує площин, які проходять через три з них?

808. Доведіть, що в просторі існує безліч різних площин. Доведіть, що в просторі існує пряма, яка перетинає дану площину.

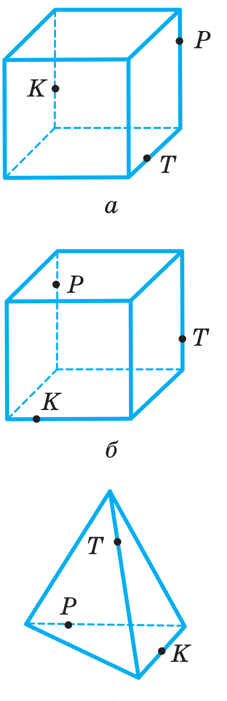
809. Доведіть, що в просторі існує площина, яка перетинає дану площину.

810. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

811. Прямі MA і MB перетинаються в точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через M, лежать в одній площині.

812. **Практичне завдання.** Зробіть кілька перерізів тетраедра, виготовленого з пластиліну. Які фігури утворилися в перерізі? Чи може перерізом тетраедра бути чотирикутник? А п'ятикутник? Відповіді обґрунтуйте.

813. Накресліть малюнки 167, *а–в* у зошиті й на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною (KPT).

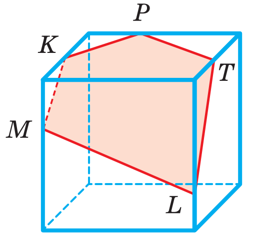


Мал. 167

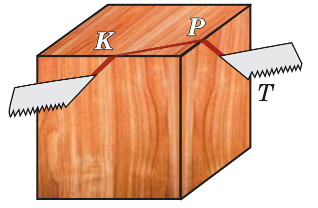
814. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через:
а) точки A, B_1 і D_1; б) точки A, C і середину ребра DD_1.

815. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

816. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 168). Чи є помилка на малюнку?



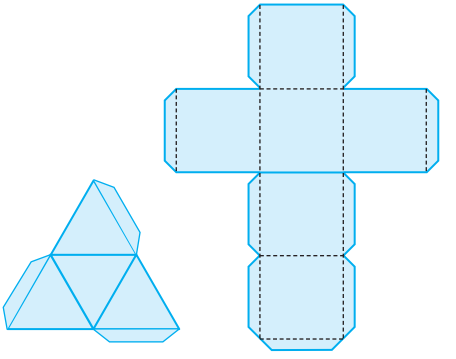
Мал. 168



Мал. 169

817. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T (мал. 169). Яка фігура буде в перерізі?

818. **Практичне завдання.** Зробіть із цупкого паперу модель куба і тетраедра, скориставшись розгортками на мал. 170. Позначте на кожному з многогранників по три точки та уявіть, яка фігура утвориться в перерізі, що проходить через задані точки.


Мал. 170

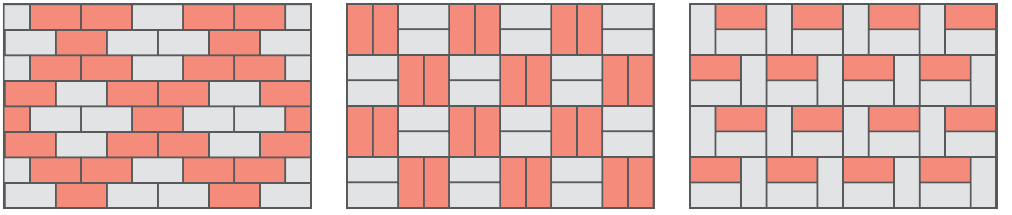
Вправи для повторення

819. Зобразіть куб і позначте його вершини. Випишіть пару ребер, які:
а) лежать в одній площині;
б) не лежать в одній площині.

820. У площині α лежать три прямі a, b, c. Відомо, що $a \parallel c$. Що можна сказати про розташування прямих b і c?

821. Тротуарна плитка має розміри 200×100 мм (мал. 171). Скільки червоної та сірої плитки знадобиться для замощення доріжки довжиною 10 м і шириною 1 м 40 см? Розрахуйте кількість кожного виду плитки, якщо доріжки замощуватимуть так, як показано на малюнках 171, *а–в*. Порівняйте вартість плитки для кожного способу замощення, якщо

100 штук сірої плитки коштують 370 грн, а 100 штук червоної — 310 грн. Яке замощення (за цих умов) є економнішим?



а *б* *в*

Мал. 171

Самостійна робота 6

Варіант 1

1. Накресліть площини α і β, які перетинаються по прямій a.
2. Скільки спільних точок можуть мати площина і промінь, початок якого цій площині не належить?
3. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через вершину D і середини ребер AB та AC. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = c$.

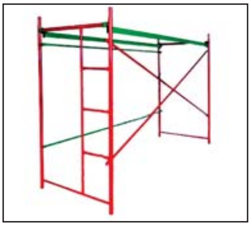
Варіант 2

1. Накресліть прямі a і b, які перетинають площу α в точці M.
2. Три точки кута лежать у площині α. Чи правильно, що кожна точка цього кута належить площині α?
3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, C і середину ребра BB_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = m$.

§ 23. Прямі у просторі

Ви вже знаєте, що в геометрії прямі мислять необмеженими, ідеально рівними і гладенькими, що не мають ніякої товщини. Матеріальними моделями частини прямої є, наприклад, олівець, плінтус на підлозі, лінії електропередач (мал. 172), частини риштування (мал. 173), залізничні колії (мал. 174) тощо.

Мал. 172



Мал. 173

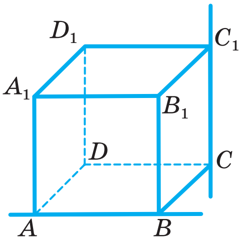
Мал. 174

Розгляньте малюнки і згадайте, як можуть розташовуватися дві прямі.

Якщо дві прямі лежать в одній площині, вони або перетинаються, або паралельні. Знайдіть зображення таких прямих на малюнках 172–174. Розгляньте уважніше малюнки 173 і 174 та знайдіть на них зображення прямих, що не перетинаються і не є паралельними. Як бачимо, у стереометрії можливий і третій випадок розташування двох прямих.

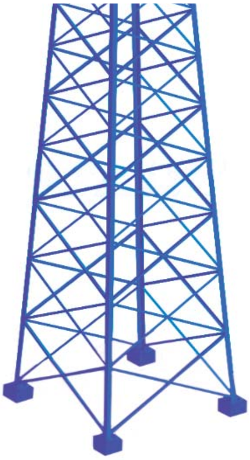
! Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають **мимобіжними.**

Такими, наприклад, є прямі, яким належать ребра AB і CC_1 куба (мал. 175).



Мал. 175

На малюнку 176 зображено десятки пар матеріальних моделей мимобіжних прямих. Мимобіжні також колія залізниці та перила переходу над нею і багато інших матеріальних моделей прямих.



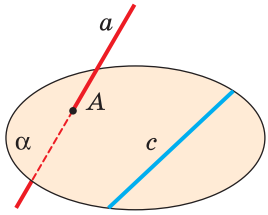
Мал. 176

ТЕОРЕМА 3

(Ознака мимобіжності прямих.) **Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі дві прямі мимобіжні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай пряма a перетинає площину α в точці A і не перетинає пряму c, що лежить у площині α (мал. 177). Доведемо, що прямі a і c мимобіжні.



Мал. 177

Припустимо, що прямі a і c не мимобіжні. Це означає, що вони лежать в якійсь площині β. Цій площині належать пряма c і точка A, які належать також і площині α. Оскільки пряма і точка, яка не належить їй, визначають єдину площину, то площина β — це та сама площина α. Таким чином, пряма c лежить у площині α, що суперечить умові задачі. Отже, прямі a і c не можуть лежати в одній площині; таким чином, вони мимобіжні. □

Згадаємо означення паралельних прямих та розглянемо їх властивості у просторі.

Як відомо, у площині через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

> !
> Дві прямі називають **паралельними**, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

ТЕОРЕМА 4

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній і до того ж тільки одну.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину. У цій площині можна провести пряму, паралельну a, і до того ж тільки одну. Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a. □

Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 куба лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині (див. мал. 175).

Мал. 178

Мал. 179

Усі ребра прямозубої циліндричної шестірні (мал. 178) лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині. Те саме можна сказати і про поздовжні ребра шпунтових дощок (мал. 179), вертикальні колони будинку тощо.

Для паралельних прямих виконується властивість транзитивності.

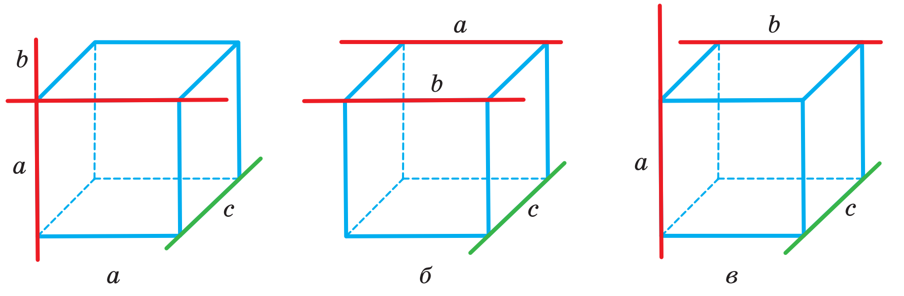
Дві **прямі, паралельні третій, паралельні**, тобто якщо $a \parallel b$ і $c \parallel b$, то $a \parallel c$.

Паралельними і мимобіжними бувають відрізки і промені.

! Два відрізки називають **паралельними** (мимобіжними), якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

Три прямі в просторі можна розташувати багатьма різними способами. Наприклад, якщо пряма *c* мимобіжна з прямими *a* і *b*, то дві останні прямі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними (мал. 180).

Інші можливі випадки розташування трьох прямих поясніть самостійно.



Мал. 180

Перевірте себе

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Які дві прямі називають мимобіжними?
3. Наведіть приклади мимобіжних прямих, моделюючи їх двома олівцями або іншими речами, що є в класі.
4. Сформулюйте ознаку мимобіжності прямих.
5. Скільки прямих можна провести через дану точку паралельно даній прямій?
6. Сформулюйте властивість транзитивності паралельних прямих.
7. Які відрізки чи промені називають паралельними?

Виконаємо разом

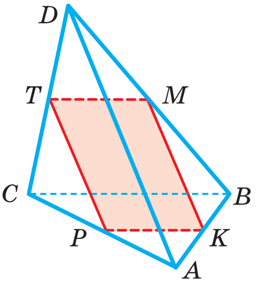
1) Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатися?

Розв'язання. Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, то через них можна було б провести площину.

У цій площині лежали б точки A, B, C, D, а отже, і прямі AB і CD, що суперечить умові задачі. Виходить, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатися.

2) K, P, T, M — середини ребер AB, AC, CD, BD тетраедра $ABDC$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.

Розв'язання. Відрізки KP і MT — середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 181). Тому кожний із них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP і MT паралельні і рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.



Мал. 181

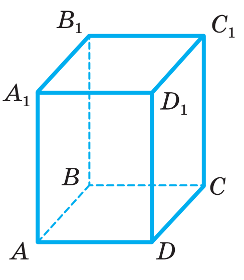
Виконайте усно

822. У просторі дано пряму a і поза нею точку A. Скільки можна провести через точку A прямих, паралельних a? А мимобіжних з a?

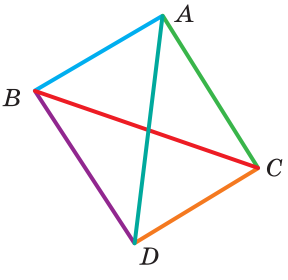
823. Пряма a і площина α не перетинаються. Скільки можна провести в площині α прямих, паралельних прямій a? А мимобіжних із прямою a?

824. Чи паралельні відрізки a і c, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$?

825. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 182). Назвіть його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перетинають AA_1; в) мимобіжні з AA_1.



Мал. 182



Мал. 183

826. На малюнку 183 зображено каркас тетраедра $ABCD$. Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AD і BC?

827. Прямі m і n не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму a, яка була б паралельною кожній із прямих m і n?

828. Розгляньте малюнок 184. Знайдіть на ньому матеріальні моделі частин прямих: а) паралельних; б) мимобіжних; в) що перетинаються.

Мал. 184

829. Чи можна вважати правильним таке означення: «Прямі називають мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»? А таке: «Прямі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині і не перетинаються»?

А

830. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 182). Установіть відповідність між прямими (1–3) та їх взаємним розміщенням (1–4).

1 DC і DD_1	**А** Паралельні
2 B_1D і BC	**Б** Перетинаються
3 AB_1 і DC_1	**В** Співпадають
	Г Мимобіжні

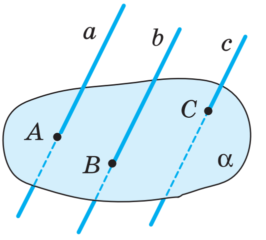
831. Назвіть три пари мимобіжних прямих, на яких лежать ребра тетраедра $ABCD$ (див. мал. 183).

832. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма. Яке взаємне розташування прямих: а) a і AB; б) a і BC?

833. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N — середини відрізків DC і DB. Яке взаємне розташування прямих: а) MN і AB; б) MN і BC; в) MN і BD?

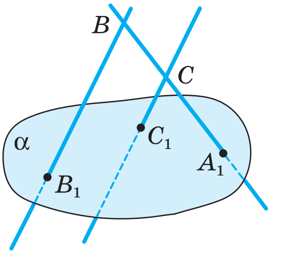
834. Точки A, B, C і D розташовані так, що $AB \parallel CD$. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? Чому?

835. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α в точках A, B, C так, як показано на малюнку 185. Чи належать дані прямі одній площині? Обґрунтуйте.



Мал. 185

836. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 186, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α — у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?



Мал. 186

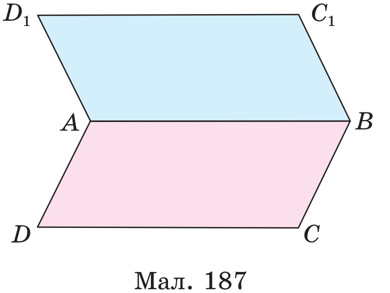
837. Через точку M проведено пряму, яка перетинає паралельні прямі a та b. Чи лежить точка M в одній площині з прямими a і b?

838. Пряма a перетинає паралельні прямі m і n. Доведіть, що всі три прямі лежать в одній площині.

839. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

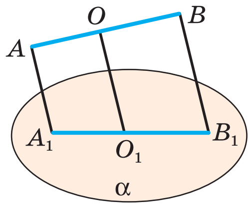
840. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 теж паралелограм (мал. 187).

841. Трапеція $ABMN$ (з основою AB) і паралелограм $ABCD$ не лежать в одній площині. Доведіть, що $MN \parallel CD$.



Мал. 187

842. Через кінці відрізка AB і його середину O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, O_1. Знайдіть довжину відрізка OO_1, якщо $AA_1 = 11$ м, $BB_1 = 33$ м і відрізок AB не перетинає площину α (мал. 188).



Мал. 188

Б

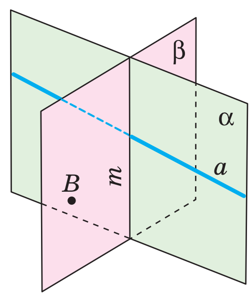
843. Точка P не лежить у площині трикутника ABC. Яке взаємне розташування прямих PC і AB? А прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій PC, а точки F і K — на прямій AB?

844. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C — пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b — мимобіжні.

845. Відомо, що $a \subset \alpha$, $b \parallel a$. Чи може пряма b перетинати площину α?

846. Дві трапеції $ABCD$ і $ABMN$ мають спільну основу, але не лежать в одній площині. Доведіть: а) CD і MN — паралельні; б) AB і CN — мимобіжні.

847. Трикутник ABC і трапеція $AMNB$ $(AB \parallel MN)$ лежать у різних площинах. E і F — середини відрізків AC і BC відповідно. Доведіть, що: а) $EF \parallel MN$; б) EF і AM — мимобіжні.



Мал. 189

848. Площини α і β перетинаються по прямій m (мал. 189). Пряма a лежить у площині α. Через точку B площини β проведіть пряму b так, щоб вона: а) перетинала a; б) була паралельною a; в) була мимобіжною з a.

849. Підприємець виготовляє з прямокутної алюмінієвої труби розсувні драбини із двома запобіжними ременями (як зображено на малюнку 190). На кожній стороні драбини є 7 щабелів, що закріплені на двох опорних жердинах.

а) Укажіть, які елементи цієї драбини є паралельними, а які мимобіжними?

б) Установіть, скільки погонних метрів труби має купити підприємець для виготовлення однієї такої драбини, якщо ширина драбини 0,5 м, а довжина у 3,3 раза більша. Врахуйте, що довжина профіля труби — 6 м.

в) Чи вистачить підприємцю 18 000 грн, щоб придбати труби на виготовлення 5 таких драбин, якщо погонний метр труби коштує 255 грн?


Мал. 190

850. Через кінці відрізка AB і внутрішню його точку M проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину α і $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 30$ см, $AM : MB = 1 : 3$.

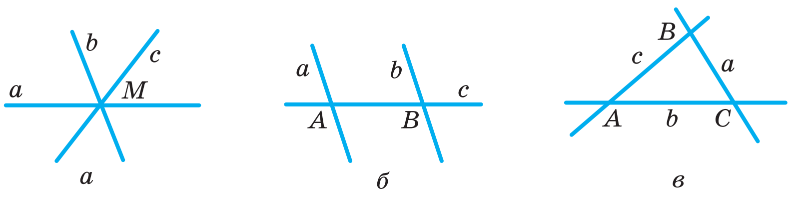
851. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині $\triangle ABC$. У скільки разів периметр $\triangle A_1B_1C_1$ більший від периметра $\triangle ABC$?

852. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

853. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть відстань MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м. Розгляньте всі можливі випадки.

854. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

855. **Практичне завдання.** Три прямі у просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці (мал. 191, *а*), одна з них може перетинати дві інші, які не мають спільних точок (мал. 191, *б*), вони можуть перетинатися попарно у трьох різних точках (мал. 191, *в*).



Мал. 191

а) Зробіть із соломинок (справжніх чи для коктейлю) моделі для кожного з перерахованих вище випадків. Чи завжди всі три прямі належать одній площині? Установіть, у якому випадку всі три прямі обов'язково належать одній площині. Обґрунтуйте.

б) За допомогою аркуша паперу (перегинанням) спробуйте створити модель розташування трьох прямих, одна з яких мимобіжна кожній із двох інших.

Вправи для повторення

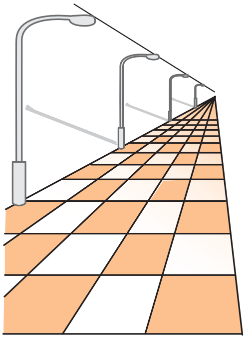
856. П'ять різних точок не лежать в одній площині. Скільки точок із заданих п'яти може лежати на одній прямій? Розгляньте різні випадки.

857. Дано правильний тетраедр $PABC$, а на його ребрі PB точку K таку, що $PK = KB = 8$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через ребро AC і точку K. Знайдіть периметр перерізу.

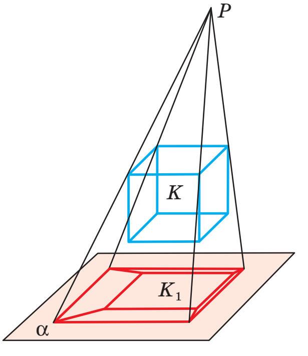
858. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 м, а гострий кут 30°. Знайдіть катети трикутника і радіус кола, вписаного в цей трикутник.

§ 24. Паралельне проектування

Для стереометрії та її застосувань на практиці багато значить уміння наочно і зручно зображати неплоскі фігури на площині. Першими з цією проблемою зіткнулися художники. Створюючи живописні полотна, вони зазвичай користуються *перспективою* — способом зображення, що ґрунтується на *центральному проектуванні* (мал. 192).



Мал. 192



Мал. 193

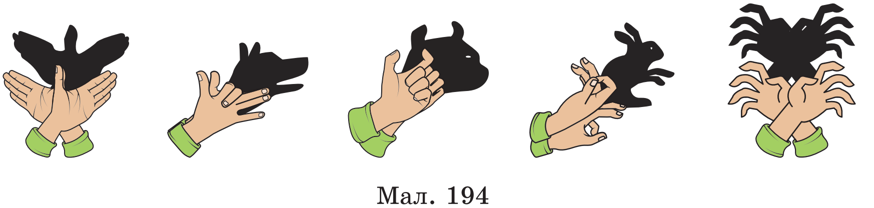
«Художник і є той, хто за потребою свого мистецтва народив... перспективу» (Леонардо да Вінчі). «Пізнати закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство» (А. Дюрер). Наочне уявлення про перспективу (центральне проектування) дає утворення тіні від предмета, освітлюваного точковим джерелом світла (мал. 193).

Геометри для зображення просторових фігур на площині частіше користуються *паралельним проектуванням*. Наочне уявлення про нього дає утворення тіні від предмета, освітлюваного паралельними променями.

> Зображення предмета, «відкинуте» на площину за допомогою променів, називають **проекцією.**

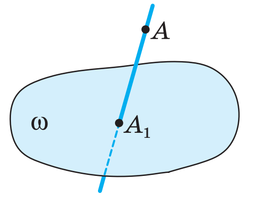
Зі шкільного курсу фізики відомо, що в реальному світі будь-який об'єкт незалежно від розміру відкидає тінь.

Ймовірно, ви бачили або й робили самі цікаві фігури за допомогою рук і тіні (мал. 194). Якщо тінь отримано за допомогою сонячних променів (які можна вважати паралельними), то зображені на малюнку 194 фігурки є паралельними проекціями долонь, складених певним способом.



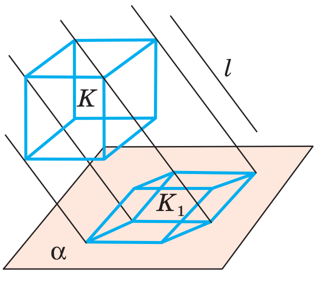
Мал. 194

Нехай дано довільну площину ω і точку A (мал. 195). Проведемо через точку A пряму, яка перетинає площину ω у деякій точці A_1. Знайдену таким способом точку A_1 називають **проекцією точки** A **на площину** ω, пряму AA_1 — **проектуючою прямою,** ω — **площиною проекцій.**



Мал. 195

Щоб побудувати проекцію будь-якої фігури, треба спроектувати на площину проекцій кожну точку даної фігури. Якщо проектуючі прямі проводять через одну точку, кажуть про *центральне проектування*. Якщо проектування здійснюється паралельними прямими, його називають *паралельним проектуванням*, а побудовані проекції — *паралельними проекціями*.



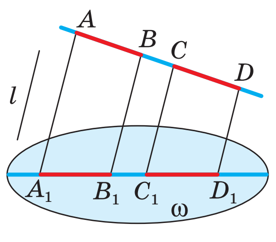
Мал. 196

Уявіть, що через кожну точку фігури K проведено прямі, паралельні якійсь прямій l до перетину з площиною α (мал. 196). Множина K_1 точок перетину всіх таких прямих із площиною α є *паралельною проекцією* фігури K на площині α. Тут α — *площина проекцій*, а прямі, паралельні l, — *проектуючі прямі*. Властивості паралельного проектування висвітлюються у такій теоремі.

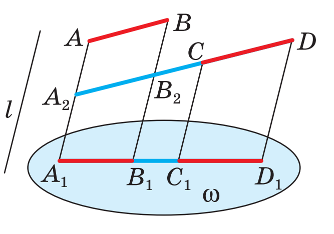
ТЕОРЕМА 5

Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:
1) **відрізки фігури зображаються відрізками;**
2) **паралельні відрізки — паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;**
3) **довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться як довжини проектованих відрізків.**

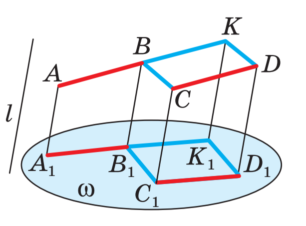
Доведення цієї теореми досить громіздке, тому ми його не наводимо. Третю частину теореми (якщо A_1B_1 і C_1D_1— проекції паралельних відрізків AB і CD, то $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$) проілюстровано малюнками 197–199.



Мал. 197

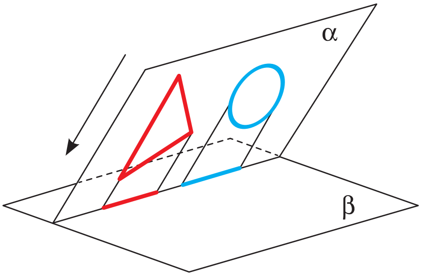


Мал. 198



Мал. 199

Якщо хоч одна проектуюча пряма лежить у площині плоскої фігури, то проекцією такої фігури є точка, відрізок, промінь чи пряма. Зокрема, проекцією трикутника, довільного многокутника, кола і круга може бути відрізок (мал. 200). Такі проекції називають *виродженими*. Здебільшого у стереометрії розглядають невироджені проекції.



Мал. 200

Перевірте себе

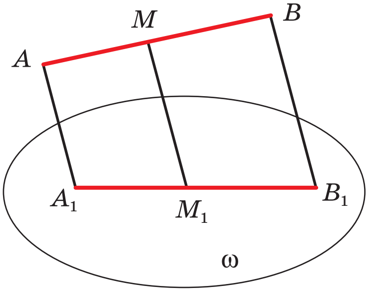
1. Поясніть кількома реченнями, що називають проектуванням.
2. Які види проектування вам відомі?
3. Що називають паралельним проектуванням?
4. Сформулюйте найважливіші властивості паралельного проектування.

Виконаємо разом

1) Якою фігурою є проекція* паралелограма?

Розв'язання. Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні, а проекції паралельних відрізків — паралельні або лежать на паралельних прямих. Отже, проекцією паралелограма є паралелограм або відрізок.

2) Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.



Мал. 201

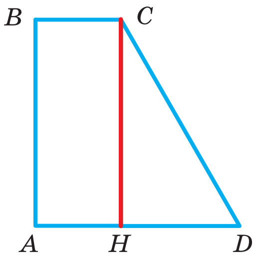
Розв'язання. Нехай точка M — середина відрізка AB, а M_1 і A_1B_1 — проекції точки M і відрізка AB на площину ω (мал. 201). Оскільки довжини проекцій відрізків однієї прямої відносяться, як і довжини проектованих відрізків, то $A_1M_1 : M_1B_1 = AM : MB = 1 : 1$. Тому $A_1M_1 = M_1B_1$, тобто M_1 — середина відрізка A_1B_1. Що й треба було довести.

3) Нехай трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 202, 203) є паралельною проекцією прямокутної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції.

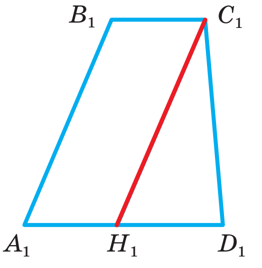
Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B прямі. Тоді висота CH буде паралельна стороні AB. Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то потрібно через

* Тут і далі йдеться про паралельні проекції.

точку C_1 провести пряму C_1H_1, паралельну A_1B_1. Відрізок C_1H_1 — проекція висоти CH.



Мал. 202



Мал. 203

Виконайте усно

859. Чим є проекція відрізка, яка паралельна проектуючій прямій?

860. Проекція фігури — точка. Назвіть цю фігуру.

861. Чи зберігаються при паралельному проектуванні міри кутів?

862. Дві прямі перетинаються. Чи правильно, що перетинаються також їхні проекції?

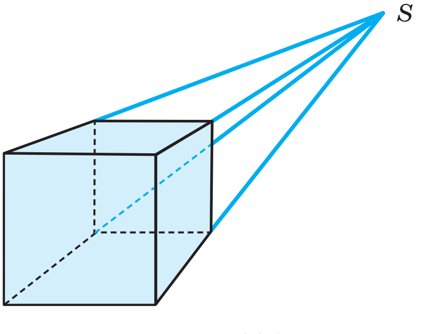
863. Проекції двох прямих перетинаються. Чи правильно, що перетинаються також дані прямі? Наведіть приклади.

864. Чи завжди паралельною проекцією квадрата є квадрат? Наведіть приклади.

865. Чи може паралельною проекцією квадрата бути паралелограм з нерівними сторонами? Чи може паралельною проекцією довільного паралелограма бути квадрат?

866. Чи може паралельною проекцією квадрата з периметром 4 см бути чотирикутник з периметром 40 см?

867. На малюнку 204 зображено куб. Чи в паралельній проекції виконано це зображення?



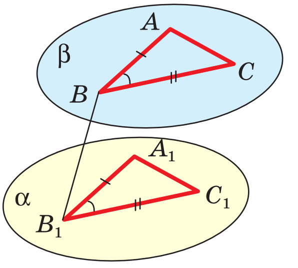
Мал. 204

868. Учень говорить: «Якщо фігура A така, що її проекції на дві різні площини — відрізки, то A — відрізок». Чи правильно це?

869. За якої умови сонячна тінь на підлозі від шибки має таку саму форму і розміри, як і шибка?

А

870. Кожна сторона трикутника дорівнює її проекції (мал. 205). Доведіть, що і кожний кут трикутника дорівнює його проекції.



Мал. 205

871. Чи може довжина паралельної проекції відрізка на площину бути меншою за довжину відрізка? А більшою?

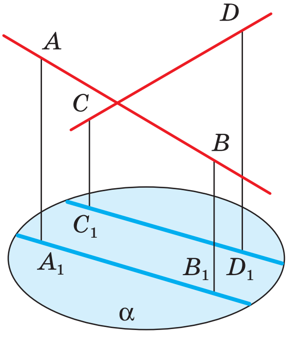
872. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину двох прямих, які: а) перетинаються; б) паралельні; а) мимобіжні? Розгляньте різні випадки. Виконайте малюнки.

873. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

874. Як потрібно розташувати в просторі три точки, щоб їх паралельними проекціями були: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки, які лежать на одній прямій; г) три точки, які не лежать на одній прямій. Виконайте малюнки.

875. Доведіть, що паралельною проекцією многокутника може бути многокутник, рівний даному.

876. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 206, якщо A_1B_1 і C_1D_1 — їхні проекції на площину α?



Мал. 206

877. Трикутник $A_1B_1C_1$ — проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

878. BH, BM, BL — висота, медіана і бісектриса трикутника ABC. $\triangle A_1B_1C_1$ — паралельна проекція $\triangle ABC$. Чи буде паралельною проекцією відрізків BH, BM, BL висота, медіана і бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

879. Паралельною проекцією точок A, B і C (C лежить між A і B) на площину α є точки A_1, B_1, C_1. Знайдіть A_1B_1 і A_1C_1, якщо $AB = 20$ см, $BC = 8$ см, а $B_1C_1 = 2$ см.

Б

880. Паралельною проекцією точок M, N, K, що лежать на одній прямій, на площину α є точки M_1, N_1, K_1. Знайдіть M_1N_1 і M_1K_1, якщо $MN = 6$ см, $MK = 4$ см, $N_1K_1 = 5$ см.

881. Намалюйте довільний паралелограм. Нехай він — проекція ромба з кутом 120°. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.

882. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ — проекція квадрата $ABCD$. Побудуйте проекції осей симетрії цього квадрата.

883. Накресліть довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$. Нехай він — проекція деякого прямокутника $ABCD$. Побудуйте проекції прямих, що проходять через точку перетину діагоналей, паралельно його сторонам.

884. Накресліть довільний трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай він є паралельною проекцією рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M $(M \in AB)$, перпендикулярно до сторін трикутника.

885. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених з точки M $(M \in BC)$ до діагоналей ромба.

886. P — внутрішня точка квадрата $ABCD$. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і його внутрішня точка M_1 — паралельна проекція цього квадрата і точки M. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M перпендикулярно до: а) сторін квадрата; б) діагоналей квадрата.

887. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона — проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції, проведеної з вершини B.

888. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину: а) куба; б) тетраедра; в) чотирикутної піраміди? Виконайте відповідні малюнки.

889. **Практичне завдання.** За допомогою настільної лампи створіть зображення прямокутного аркуша паперу, «відкинуте» променями на площину стола. Дослідіть, якою фігурою може бути проекція прямокутника при центральному проектуванні. А при паралельному?

Вправи для повторення

890. Лижник підіймається крутим пагорбом від одного дерева до іншого (мал. 207). Схил пагорба між цими деревами постійний, а основа одного дерева розміщується на 90 метрів вище, ніж іншого. Горизонтальна відстань між деревами становить 400 метрів. Скільки метрів має пройти лижник пагорбом, щоб дійти від одного дерева до іншого?

Мал. 207

891. Прямі a і b — мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N — на прямій b. Яке взаємне розташування прямих AN і BM?

892. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершину A_1 і точки K, L — середини ребер D_1C_1, C_1B_1.

§ 25. Зображення фігур у стереометрії

У стереометрії розглядають не тільки плоскі, а й неплоскі фігури. Зображати неплоску фігуру на площині непросто: неминуче доводиться спотворювати деякі її елементи. Для геометрів, креслярів та інших фахівців зручнішим є паралельне проектування — коли паралельні відрізки фігури-оригіналу проектуються на паралельні відрізки зображення. Такі зображення не тільки дають можливість уявляти форму розглядуваної фігури, а й додатково вказують на відношення деяких її розмірів. Адже при паралельному проектуванні зберігається відношення довжин паралельних відрізків.

Якщо маємо яку-небудь фігуру F — оригінал і її паралельну проекцію F_1 на площині, то F_1 можна вважати зображенням фігури F.

А як зображати на аркуші паперу надто великі об'єкти, наприклад куб зі стороною 10 м? Домовилися зображенням такого куба вважати його проекцію на площину, зменшену в кілька разів.

При цьому маються на увазі невироджені проекції, які дають змогу однозначно визначити форму зображуваної фігури. Паралельною проекцією куба може бути квадрат або прямокутник з двома відрізками. А такі зображення не наочні і незрозумілі. Адже існує безліч різних геометричних тіл, відмінних від куба, що мають такі самі проекції.

!

Зображенням фігури називають будь-яку фігуру, подібну паралельній проекції даної фігури.

Щоб зображення фігури було зрозумілішим, з усіх можливих її проекцій вибирають такі, на яких є зображення всіх її частин. При цьому «невидимі» лінії (розташовані за іншими частинами фігури) зображають штриховими лініями. Креслярі користуються й іншими видами ліній (мал. 208).

Лінії	Назва
	Суцільна
	Суцільна потовщена
	Штрихова
	Штрихпунктирна
	Пунктирна

Мал. 208

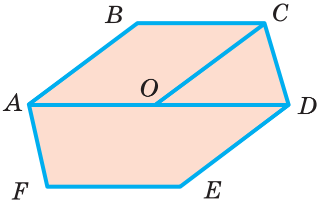
У стереометрії найчастіше доводиться мати справу із зображеннями неплоских фігур: призм, пірамід і т. п. А щоб правильно виконувати їх зображення, бажано знати, якими можуть бути зображення найпоширеніших плоских фігур.

Зображенням паралелограма може бути будь-який інший паралелограм, оскільки при паралельному проектуванні паралельні відрізки відображаються на паралельні відрізки. Зокрема, ромб, прямокутник, квадрат можна зображати будь-яким паралелограмом. І навпаки, будь-який паралелограм можна зображати у вигляді квадрата, ромба, прямокутника чи іншого паралелограма.

Зображенням трапеції може бути будь-яка інша трапеція з таким самим відношенням довжин основ, оскільки при паралельному проектуванні відношення довжин паралельних відрізків зберігаються.

Зображенням будь-якого трикутника може бути довільний трикутник. І будь-який трикутник може бути зображенням безлічі інших трикутників. Зокрема, будь-який трикутник можна зображати у вигляді трикутника правильного, рівнобедреного, прямокутного, тупокутного чи гострокутного.

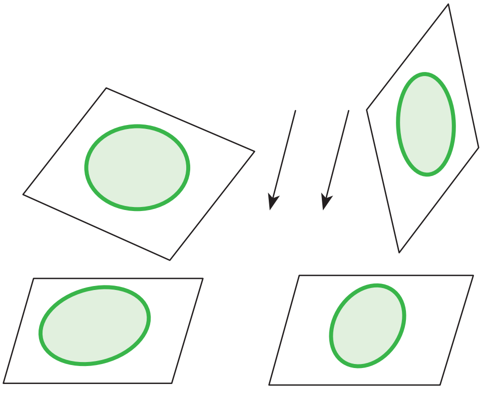
Правильний шестикутник можна зображати довільним шестикутником, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні і одній з діагоналей, що проходить через центр шестикутника (мал. 209). Чому?

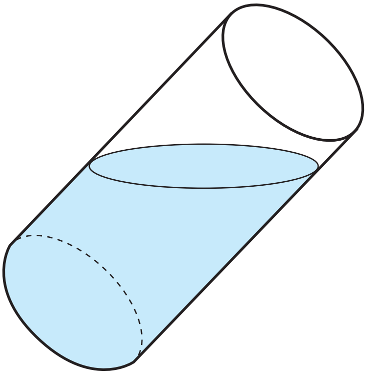


Мал. 209

Проекція многокутника — многокутник або відрізок. А якою фігурою є проекція кола?

Проекцією кола може бути коло, еліпс або відрізок. Проекція того самого круга може бути різною залежно від кута між площиною проекцій і площиною круга (мал. 210). Наочні зображення циліндра, конуса та інших фігур обертання містять різні еліпси.


Мал. 210


Мал. 211

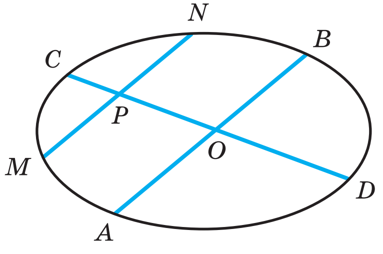
Траєкторії усіх планет Сонячної та інших космічних систем мають форми еліпсів. Скінченну частину площини, обмежену еліпсом, також називають еліпсом. Форму такого еліпса має, наприклад, поверхня води в нахиленому циліндричному стакані (мал. 211). Докладніше еліпси розглядають у вищій геометрії.

При зображенні многокутників, вписаних у коло або описаних навколо нього, користуються поняттям спряжених діаметрів.

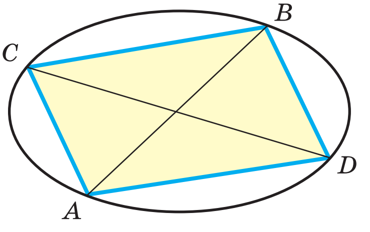
Два діаметри еліпса називають **спряженими**, якщо кожний із них ділить хорди, паралельні іншому, навпіл. На оригіналі спряженим діаметрам еліпса відповідають перпендикулярні діаметри кола.

Щоб побудувати спряжені діаметри еліпса (мал. 212), потрібно:

1. Провести через центр O еліпса довільний діаметр AB.
2. Провести довільну хорду $MN \parallel AB$.
3. Знайти точку P — середину хорди MN.
4. Через точки O і P провести діаметр CD. Діаметри AB і CD спряжені.



Мал. 212



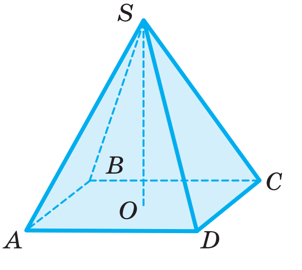
Мал. 213

Якщо сполучити послідовно точки A, C, B, D — кінці спряжених діаметрів, то отримаємо зображення квадрата, вписаного в коло (мал. 213). Чому?

Креслити просторові фігури потрібно так, щоб зображення було правильним (фігурою, подібною до паралельної проекції оригіналу) і наочним (давало правильне уявлення про форму оригіналу), швидко і легко могло виконуватися.

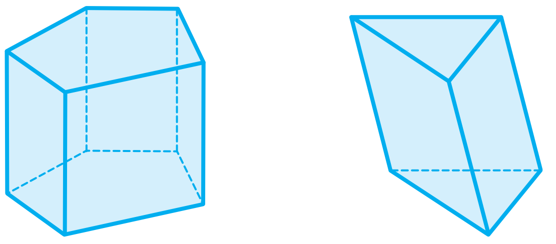
Щоб зобразити піраміду (мал. 214), потрібно:

1. Побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі.
2. За умовою задачі знайти положення точки O — основи висоти SO (якщо піраміда правильна, то O — центр многокутника, який лежить в основі).
3. З точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку S — вершину піраміди.
4. Сполучити точку S з вершинами основи.
5. Виділити видимі і невидимі ребра піраміди.



Мал. 214

Побудову призми виконують, починаючи з основи. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками (мал. 215, *а*), а похилої призми — похилими (мал. 215, *б*).



а *б*

Мал. 215

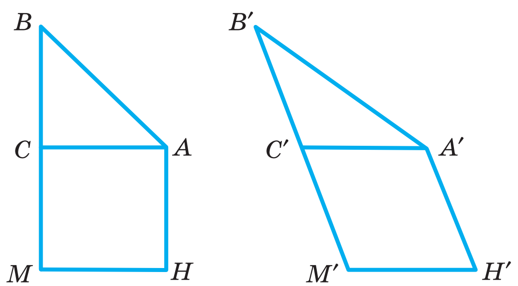
Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядаються в кресленні та нарисній геометрії.

Перевірте себе

1. Що називають зображенням фігури в стереометрії?
2. Який вид проектування використовують при зображенні фігур у стереометрії?
3. Якими фігурами можна зображати паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб, трапецію, коло?
4. Як побудувати прямокутний паралелепіпед, похилий паралелепіпед, трикутну призму, чотирикутну піраміду?

Виконаємо разом

1) Дано зображення прямокутного рівнобедреного трикутника. Побудуйте в його площині зображення квадрата, стороною якого є катет даного трикутника.



а *б*

Мал. 216

Розв'язання. Нехай $ACMH$ — квадрат, побудований на катеті рівнобедреного $\triangle ABC$ (мал. 216, *а*), тоді: $BC = AC = CM$, тобто C — середина відрізка BM.

Оскільки $ACMH$ — квадрат, то $MH \parallel CA$ і $MH = CA$.

Враховуючи все це, можемо виконати побудову зображення (мал. 216, *б*).

1. Побудуємо довільний $\triangle A'B'C'$, який є зображенням $\triangle ABC$.

2. Побудуємо промінь $B'C'$ і позначимо на ньому точку M' таку, що $C'M' = B'C'$.

3. Проведемо відрізок $M'H'$ такий, що $M'H' \parallel C'A'$ і $M'H' = C'A'$.

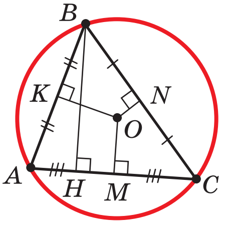
4. Сполучимо точки A' і H'.

Чотирикутник $A'C'M'H'$ — зображення шуканого квадрата.

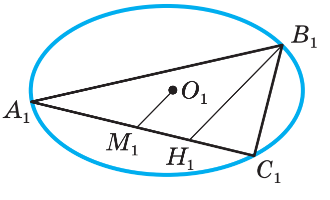
2) Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло. Побудуйте зображення висоти цього трикутника.

Розв'язання. Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, а BH — висота цього трикутника (мал. 217). Оскільки центр кола, описаного навколо трикутника, лежить в точці перетину серединних перпендикулярів, то $AM = MC$ і $OM \perp AC$. Висота трикутника BH перпендикулярна до сторони AC, тому $BH \parallel OM$.

Враховуючи, що при паралельному проектуванні паралельні відрізки переходять у паралельні відрізки, а рівні відрізки однієї прямої переходять у рівні відрізки іншої прямої, можемо виконати побудову зображення. Нехай еліпс із центром O_1 є зображенням даного кола, а трикутник $A_1B_1C_1$ — зображенням трикутника ABC (мал. 218). Побудуємо точку M_1 — середину відрізка A_1C_1 ($A_1M_1 = M_1C_1$). З'єднаємо точки O_1 і M_1. З вершини B_1 проведемо відрізок, паралельний відрізку O_1M_1. Тоді відрізок B_1H_1 — зображення висоти BH.



Мал. 217



Мал. 218

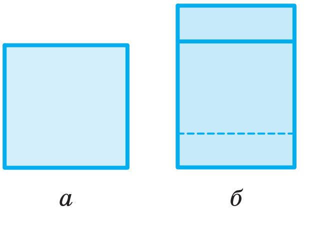
Виконайте усно

893. Чи може рівносторонній трикутник бути зображенням прямокутного трикутника? А тупокутного?

894. Чи може зображенням квадрата бути ромб? А зображенням трапеції паралелограм?

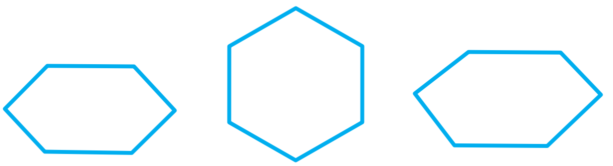
895. Яка з наведених на малюнку 219 фігур є зображенням (паралельною проекцією) куба?

896. Який із шестикутників, що на малюнку 220, є зображенням правильного шестикутника?



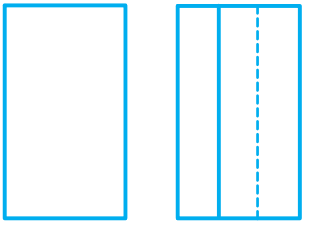
Мал. 219

897. Чи можна малюнок 221 вважати зображенням прямокутного паралелепіпеда? Чи наочне таке зображення?



а *б* *в*

Мал. 220



а *б*

Мал. 221

898. Який з елементів трикутника — висота, медіана, бісектриса, середня лінія — після проектування залишається тим самим елементом трикутника?

А

899. Зобразіть пряму a і площину α такі, що:
а) $a \cap \alpha = A$; б) $a \cap \alpha = \varnothing$; в) $a \cap \alpha = a$.

900. Зобразіть площини α і β такі, що:
а) $\beta \cap \alpha = \varnothing$; б) $\beta \cap \alpha = c$.

901. Зобразіть три різні площини, які: а) мають тільки одну спільну точку; б) попарно перетинаються, але не мають спільної точки.

902. Накресліть зображення: а) куба; б) прямокутного паралелепіпеда; в) трикутної піраміди; г) чотирикутної піраміди.

903. Зобразіть куб і пряму, яка проходить через центри його граней: а) протилежних; б) сусідніх.

904. Зобразіть куб і площину, яка розрізає його на: а) два рівні паралелепіпеди; б) дві трикутні призми; в) дві чотирикутні призми.

905. Художники намагаються відтворити багатогранне багатство світу, об'ємність та повноту предметів на полотні чи папері. До того ж є картини, на яких зображені просторові об'єкти, створені на основі оптичних ілюзій. Це, наприклад, відома робота М. Ешера «Водоспад» (мал. 222). Створюється враження, що водоспад є замкнутою системою і працює як вічний двигун. Знайдіть на малюнку «неможливі трикутники». Дізнайтеся більше про «неможливі фігури» та їх зображення.

Мал. 222

906. Побудуйте зображення:
а) медіан трикутника;
б) середніх ліній трикутника.

907. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

908. Побудуйте зображення прямих, які проходять через точку M — внутрішню точку рівностороннього $\triangle ABC$, перпендикулярно до сторін цього трикутника.

909. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола.

910. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Побудуйте зображення серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

911. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра описаного кола.

912. Намалюйте еліпс і проведіть довільний діаметр AB. Побудуйте діаметр, спряжений до AB.

913. Побудуйте зображення: а) квадрата, вписаного в коло; б) квадрата, описаного навколо кола.

914. Побудуйте зображення правильного трикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

915. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

916. Побудуйте зображення прямокутника, вписаного в коло.

917. На колі дано точку M. Побудуйте зображення дотичної, проведеної до кола в цій точці.

Б

918. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола, якщо:

а) $AC : BC = 1 : 3$; б) $BC : AB = 4 : 5$.

919. У трикутнику ABC $AB : AC = 2 : 3$. Побудуйте на його зображенні зображення бісектриси, проведеної з вершини A.

920. Основи трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

921. Гострий кут ромба дорівнює 60°. Побудуйте на його зображенні зображення висот цього ромба, проведених із вершини:

а) тупого кута; б) гострого кута.

922. Діагоналі ромба відносяться як 1 : 2. Побудуйте на його зображенні зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута.

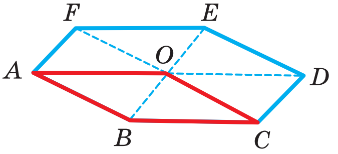
923. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 2. Побудуйте на його зображенні зображення центра кола, вписаного в трикутник.

924. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AH ділить сторону BC у відношенні $BH : HC = 3 : 1$. Побудуйте на його зображенні зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

925. Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло. Побудуйте зображення точки перетину висот цього трикутника.

926. Побудуйте зображення правильного шестикутника:
а) вписаного в коло;
б) описаного навколо кола.

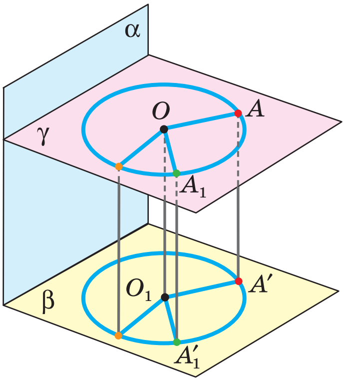
927. Щоб зобразити паралельну проекцію правильного шестикутника, учень побудував паралелограм $ABCO$, продовжив його сторони AO, CO і діагональ BO так, що $OD = AO$, $OF = CO$, $OE = BO$ (мал. 223), і вважає шуканою проекцією шестикутник $ABCDEF$. Чи правильна така побудова?



Мал. 223

928. Побудуйте зображення паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо дані зображення точок:
а) A, B, C, D_1; б) A, B, D, A_1; в) B, B_1, C_1, D.

929. **Практичне завдання.** За допомогою моделі, зображеної на малюнку 224, можна показати, що паралельною проекцією кола є таке саме коло. Створіть модель, за допомогою якої можна показати, що паралельною проекцією кола є: а) відрізок; б) еліпс.



Мал. 224

Вправи для повторення

930. Знайдіть довжини медіан прямокутного трикутника з катетами 5 м і 12 м.

931. Випишіть у дві колонки грані куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, які: а) перетинаються; б) паралельні.

932. Площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму a, $a \parallel c$. Укажіть кілька способів побудови прямої b, $b \subset \beta$, $b \parallel a$.

§ 26. Паралельність прямої і площини

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Ви вже знаєте, як у просторі можуть розташовуватися дві різні прямі. Вони можуть: а) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку; б) бути паралельними, тобто не мати спільних точок, але лежати в одній площині; в) бути мимобіжними, тобто не мати спільних точок і не лежати в одній площині. Наведіть відповідні приклади з навколишнього середовища.

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Розгляньте малюнок 225 та опишіть можливі варіанти.

а *б* *в*

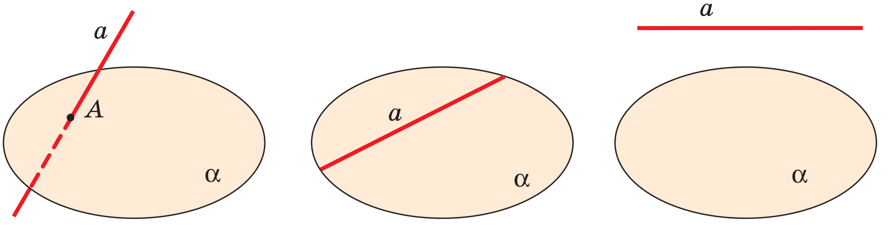
Мал. 225

У просторі пряма і площина можуть:

1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку: $a \cap \alpha = A$ (мал. 226, *а*);
2) кожна точка прямої може лежати в площині: $a \subset \alpha$ (мал. 226, *б*);
3) не мати жодної спільної точки: $a \cap \alpha = \varnothing$ (мал. 226, *в*).

> **!** Пряму і площину називають **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

У третьому випадку кажуть про паралельність прямої і площини. Якщо пряма a і площина α паралельні, то пишуть: $a \parallel \alpha$.



а *б* *в*

Мал. 226

Властивості паралельних прямої і площини сформулюємо у вигляді теорем.

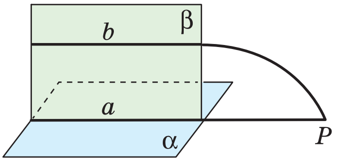
ТЕОРЕМА 6

(Ознака паралельності прямої і площини.) **Якщо пряма паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай пряма $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма b не паралельна a, а перетинає площину α у деякій точці P (мал. 227). Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні



Мал. 227

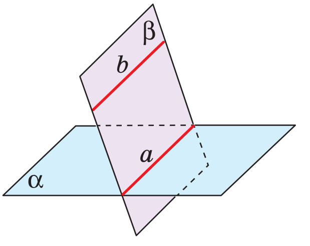
прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: паралельні прямі a і b мають спільну точку P. Виходить, що пряма b не може перетинати площину α. Вона і не лежить у площині α. Отже, $b \parallel \alpha$. □

ТЕОРЕМА 7

Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

ДОВЕДЕННЯ.

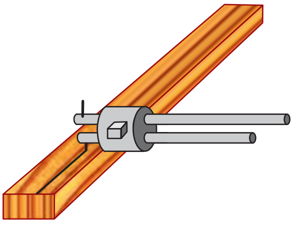
Нехай пряма b не лежить у площині α: $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 228). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетиналися, точка їх перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються. А лежать вони в одній площині β. Тому $a \parallel b$. Якщо $b \subset \alpha$, то теорема очевидна. □



Мал. 228

!

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.


Мал. 229

Приклади. а) Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней (покажіть це на малюнку).

б) Пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 229), паралельна площинам трьох його граней.

в) Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна (див. мал. 230) паралельні площині поля. Усе це — матеріальні моделі паралельності прямої і площини.


Мал. 230

Перевірте себе

1. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?
2. Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої і площини.
4. Чи може бути відрізок або промінь паралельний площині?
5. Який відрізок називають паралельним площині?

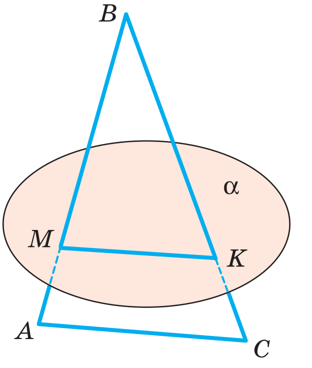
Виконаємо разом

1) Площина α перетинає сторони $\triangle ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що: $AC \parallel \alpha$, $AM : MB = 2 : 5$ (мал. 231). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.

Розв'язання. Оскільки $AC \parallel \alpha$ і $AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α по прямій, яка паралельна AC (теорема 7), тобто $MK \parallel AC$. Тоді $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Маємо:

$$\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB}, \text{ звідси } \frac{MK}{AC} = \frac{5}{7},$$

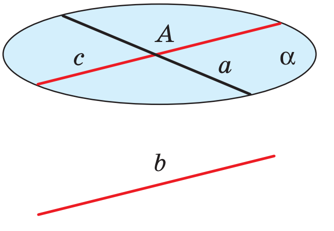
а $AC = 1{,}4 \cdot MK = 1{,}4a$.



Мал. 231

2) Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

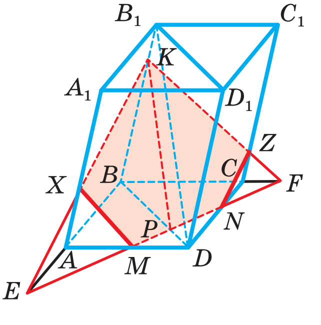
Розв'язання. На малюнку 232 зображено мимобіжні прямі a і b. Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина. Оскільки $b \parallel c$, тому $b \parallel \alpha$.



Мал. 232

3) Через середини M і N ребер AD і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною.

Розв'язання. Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер AD і CD (мал. 233). Уявимо площину BB_1D_1D, яка перетинає відрізок MN у точці P. Через точку P у площині BB_1D_1D проведемо $PK \parallel B_1D$. Знайдемо точку E — точку перетину прямих AB і MN та проведемо відрізок EK, який перетинає ребро AA_1 у точці X. Аналогічно будуємо відрізок KZ. Провівши відрізки XM і ZM, отримаємо шуканий переріз $MXKZN$.



Мал. 233

Виконайте усно

933. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі прямої і площини, які:

а) паралельні; б) непаралельні.

934. Пряма a паралельна площині α. а) Чи кожна пряма площини α паралельна прямій a? б) Скільки в площині α можна провести прямих, паралельних прямій a? в) Чи існують у площині α прямі, мимобіжні з прямою a?

935. Пряма a не паралельна площині α. Чи існують у площині α прямі, паралельні прямій a? Чи правильно, що кожна пряма, паралельна a, перетинає площину α?

936. Кожна з прямих a і b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що прямі a і b паралельні?

937. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

938. Кожна із площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатися?

939. Скільки прямих, паралельних площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$? А якщо $A \in \alpha$?

940. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

А

941. $ABCD$ — паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C. Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

942. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції.

943. Точки A і B лежать у площині α, а O — поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AO і OB, паралельна площині α.

944. Площина α перетинає відрізки AB і AC у їх серединах — точках K і P. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$. Як відносяться площі $\triangle ABC$ і $\triangle AKP$?

945. Дві протилежні сторони паралелограма паралельні площині. Чи паралельні цій площині й дві інші сторони? Чому?

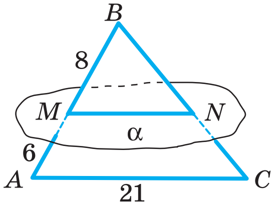
946. Основи трапеції паралельні одній площині. Чи паралельні їй і бічні сторони трапеції? Обґрунтуйте.

947. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками 234.

А

$AC \parallel \alpha$

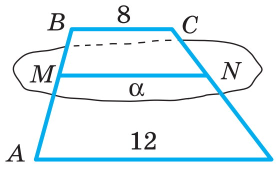
MN — ?



Б

$BM : MA = 1 : 3$,
$BC \parallel \alpha$, $ABCD$ — трапеція

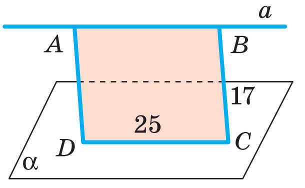
MN — ?



В

$a \parallel \alpha$, $AD \parallel BC$

P_{ABCD} — ?



Мал. 234

948. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих, що: а) перетинають площину α і паралельні прямій a; б) перетинають пряму a і паралельні площині α?

949. Яким граням прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельна пряма: а) AB; б) B_1C_1; в) DD_1?

950. Якщо P і H — середини відрізків AB_1 і B_1C на кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то пряма PH паралельна його грані $ABCD$. Доведіть.

951. Через середини двох ребер основи і вершину тетраедра проведено площину. Доведіть, що ця площина паралельна третьому ребру тетраедра.

952. Через точку P, середину сторони AC рівностороннього трикутника ABC, проведено площину α, яка перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть PK, якщо $\alpha \parallel AB$, а $AC = 12$ м.

953. Площина α, паралельна основі трапеції, перетинає її бічні сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Знайдіть MN, якщо $AD = 7$ см, $BC = 3$ см, а $AM = BM$.

Б

954. Площина α перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках A_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка A_1C_1, якщо $AC \parallel \alpha$ і:
а) $AC = 12$ м, $BA_1 : BA = 4 : 6$; б) $AC = 21$ м, $BA_1 : A_1A = 4 : 3$.

955. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$ і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$, якщо $MN = 2$ см.

956. Через точку M — середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC — проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см^2.

957. Через точку M, яка лежить на стороні AB трикутника ABC, паралельно стороні AC проведено площину, яка перетинає сторону BC у точці N. Знайдіть MN, якщо:
а) $AM = 10$ см, $BM = 5$ см, $AC = 12$ см;
б) $AM : BM = 2 : 3$, $AC = 10$ см;
в) $AM - BM = 2$ см, $AC = 16$ см, $MN = BM$.

958. Площина, проведена паралельно основі AD трапеції $ABCD$, перетинає її бічні сторони в точках M і N $(M \in AB)$. Знайдіть MN, якщо:
а) $BC = 10$ см, $AD = 12$ см, $AM = MB$;
б) $AD = 17$ см, $BC = 5$ см, $AM = 4$ см, $BM = 2$ см;
в) $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $BM : AB = 2 : 3$.

959. Через дану точку проведіть пряму, паралельну даній площині.

960. Дано площину і паралельну їй пряму. Через точку, взяту на площині, проведіть у цій самій площині пряму, паралельну даній прямій.

961. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через B і C? Розгляньте всі випадки.

962. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині. Зробіть відповідну модель.

963. $PABC$ — тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA і PC. Знайдіть площу перерізу.

964. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

965. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

966. **Практичне завдання.** Підготуйте презентацію на тему «Взаємне розміщення прямої і площини у ...», обравши одну з підтем: техніка, побут, природа, будівництво, торгівля, сільське господарство, мистецтво, спорт тощо.

Вправи для повторення

967. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

968. Точка M не лежить у площині трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків MB і MC, паралельна середній лінії трапеції.

969. Основи трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

§ 27. Паралельність площин

> Дві площини називають **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

Подивіться навколо себе. Які елементи довкілля можна вважати матеріальними моделями площин чи їхніх частин? Яким є взаємне розташування цих «площин» (мал. 235)?

Мал. 235

Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

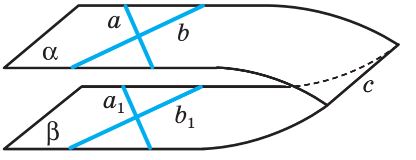
ТЕОРЕМА 8

(Ознака паралельності площин.) **Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 — у площині β (мал. 236). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.



Мал. 236

Прямі a і b не перетинають пряму c, оскільки c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$, тобто дві прямі, які перетинаються, паралельні третій прямій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися: $\alpha \parallel \beta$. □

Можна довести такі властивості паралельних прямих.

Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

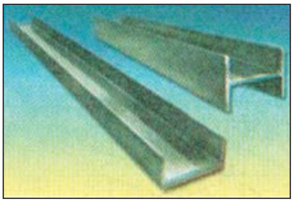
Моделі паралельних площин: підлога і стеля кімнати, шибки подвійних вікон. Паралельні шари фанери, протилежні грані цеглини, швелера та двотаврової балки (мал. 237), пилки пилорами (мал. 238) та ін.

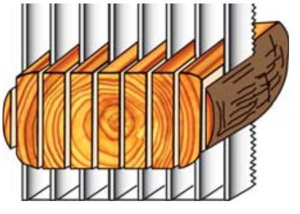
Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

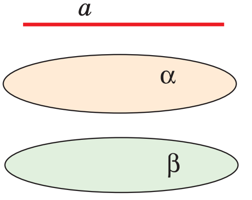
- Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).
- Якщо $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$ (симетричність).
- Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$ (транзитивність).

Спробуйте обґрунтувати таке твердження.

Якщо пряма a і площини α, β такі, що $a \parallel \alpha$ і $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel \beta$ (мал. 239).


Мал. 237


Мал. 238



Мал. 239

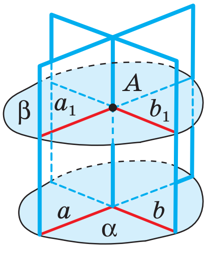
Перевірте себе

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте теорему про перетин двох паралельних площин паралельними прямими.

Виконаємо разом

1) Як через точку A поза даною площиною α провести площину, паралельну площині α?

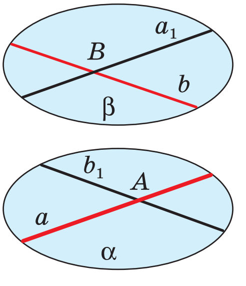
Розв'язання. У даній площині α проведемо прямі a і b, які перетинаються (мал. 240). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1 перетинаються, тому через них можна провести площину β. За ознакою паралельності площин $\beta \parallel \alpha$.



Мал. 240

2) Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести пару паралельних площин.

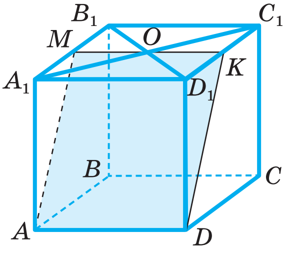
Розв'язання. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 241). Через довільну точку A прямої a проведемо пряму b_1, паралельну b, а через пересічні прямі a і b_1 — площину α. Так само через довільну точку B прямої b проведемо пряму a_1, паралельну a, а через прямі b і a_1 — площину β. За ознакою паралельності площини α і β паралельні.



Мал. 241

3) Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

Розв'язання. Нехай переріз проходить через ребро AD та точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через O проведемо відрізок MK такий, що $MK \parallel AD$, $M \in A_1B_1$, $K \in C_1D_1$. Сполучимо точки A, M, K і D. Тоді $AMKD$ — шуканий переріз (мал. 242).



Мал. 242

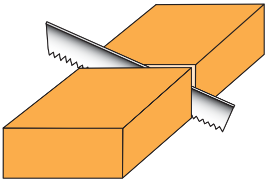
Виконайте усно

970. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі площин: а) паралельних; б) непаралельних.

971. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розташовані площини α і (ABC)?

972. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні: а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?

973. Кожна грань дошки — прямокутник (мал. 243). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.



Мал. 243

974. Чи рівні відрізки відтинають дві паралельні площини від трьох паралельних прямих? Чому?

975. Чи можуть дві непаралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох паралельних прямих?

976. Чи можуть дві паралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох непаралельних прямих?

977. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

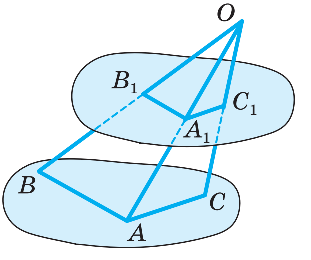
978. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

А

979. Дві прямі площини α паралельні двом прямим площини β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

980. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

981. Відрізки OA, OB, OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їх середини, паралельна площині (ABC) (мал. 244).



Мал. 244

982. Точка O — спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, що не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

983. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

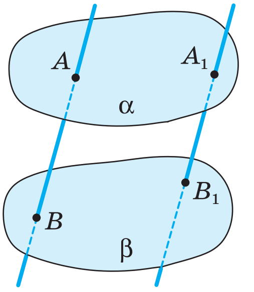
984. Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

985. З вершин трикутника ABC в один бік від його площини проведено рівні і паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

986. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, K, P, T — середини ребер, що виходять з вершини B. Доведіть, що площини (KPT) і (AB_1C) паралельні.

987. K, P, T — середини трьох попарно паралельних ребер куба. Доведіть, що площина (KPT) ділить навпіл і четверте ребро куба.

988. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β перетинають їх у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 245?



Мал. 245

Б

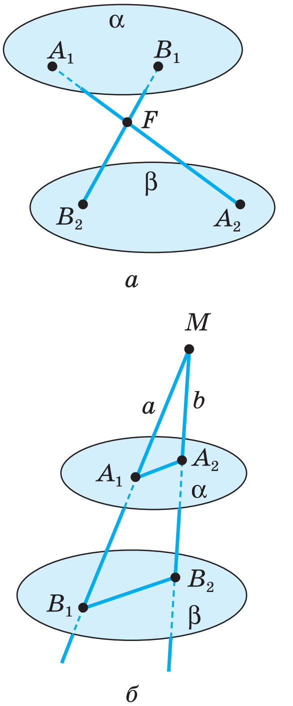
989. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

990. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

991. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

992. Точка F лежить між паралельними площинами α і β (мал. 246, *а*). Прямі a і b, що проходять через точку F, перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β відповідно в точках A_2 і B_2. Знайдіть FB_1, якщо $A_1F : A_1A_2 = 1 : 3$, $B_1B_2 = 30$ дм.

993. Через точку M проведено дві прямі a і b, що перетинають дві паралельні площини α і β (мал. 246, *б*). Першу перетинають у точках A_1 і A_2, другу перетинають у точках B_1 і B_2. Обчисліть MA_1 і MB_2, якщо $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 4$, $A_1B_1 = 3{,}5$ м, $MA_2 = 1{,}2$ м.



Мал. 246

994. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β — у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;

б) $AC : BC = 1 : 3$, $BB_1 = 9$ см;

в) $A_1C : A_1B_1 = 2 : 3$, $BB_1 = 10$ см;

г) $AC = 2$ м, $BB_1 = 8$ м, $CB = AA_1$.

995. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

996. Дано три паралельні площини α, $α_1$, $α_2$, прямі a і b перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

997. Точка A_1 ділить ребро PA правильного тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через точку A_1. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 20$ см.

998*. $ABCDEFA$ — неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

999. **Практичне завдання.** Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми про перетин двох паралельних площин третьою площиною.

Вправи для повторення

1000. Господарі однієї прямокутної садиби для захисту ґрунту під плодовими кущами від пересихання й перегрівання вирішили вкрити ґрунт мульчею. Відомо, що з одного мішка мульчі (50 л) можна покрити ділянку площею 3,5–3,75 м². Скільки мішків мульчі слід купити, щоб замульчувати дві ділянки, які показано на малюнку 247. Дізнайтеся ціни на різні види мульчі і встановіть можливу вартість покупки.

Мал. 247

1001. На зображенні рівностороннього трикутника побудуйте зображення центра описаного кола.

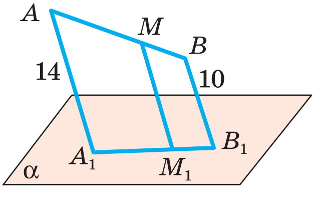
1002. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма AC паралельна площині, яка проходить через середини відрізків AB, BC, BD.

Самостійна робота 7

Варіант 1

1 Прямокутники $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки C, K, P, D — вершини паралелограма.

2 Відрізок A_1B_1 — паралельна проекція відрізка AB на площину α (мал. 248). Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$, $AM : MB = 3 : 2$ і $AA_1 = 14$ см, $BB_1 = 10$ см.

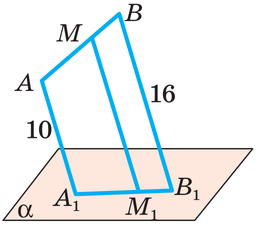


Мал. 248

Варіант 2

1 Ромби $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки P, K, C, D — вершини паралелограма.

2 Відрізок A_1B_1 — паралельна проекція відрізка AB на площину α (мал. 249). Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 16$ см. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$, $AM : MB = 2 : 1$.



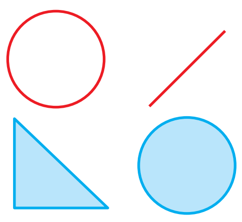
Мал. 249

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

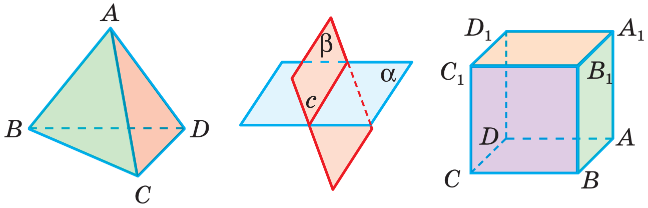
✓ Розумію, що таке геометрична фігура.
Геометрична фігура — будь-яка множина точок. Скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.

Геометричні фігури

Плоскі



Неплоскі



✓ Розрізняю означувані та неозначувані поняття, можу назвати основні поняття:
- **Геометричні фігури** — точка, пряма, площина, простір;
- **Відношення** — *належати* (точка належить прямій чи площині), *лежати між* (точка A лежить між B і C).

✓ Усвідомлюю, що властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою аксіом площини і 4-х стереометричних аксіом. Можу формулювати та використовувати аксіоми стереометрії:

C_1. У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.
C_2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.
C_3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.
C_4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

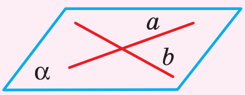
✓ Можу формулювати та використовувати наслідки з аксіом стереометрії:
- Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну;
- Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

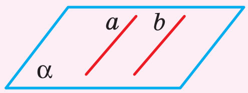
✓ Можу класифікувати взаємне розміщення прямих у просторі:

Прямі a і b

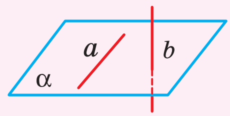
- **Лежать в одній площині**
  - **Перетинаються**



  - **Паралельні**



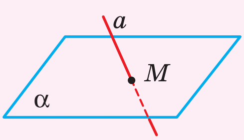
- **Не лежать в одній площині**
  - **Мимобіжні**



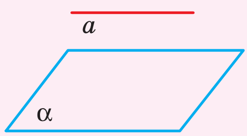
✓ Можу класифікувати взаємне розміщення прямих і площин у просторі:

Пряма і площина у просторі

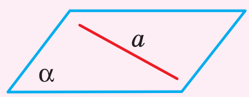
- **Мають одну спільну точку**
  - **Перетинаються**



- **Не мають спільних точок**
  - **Паралельні**



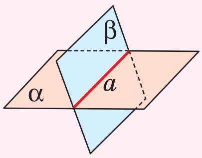
- **Мають дві спільні точки**
  - **Пряма лежить у площині**



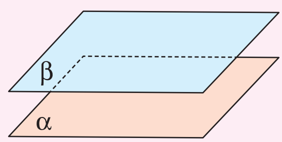
✓ Можу класифікувати взаємне розміщення площин у просторі:

Дві площини у просторі

- **Перетинаються (мають спільну пряму)**



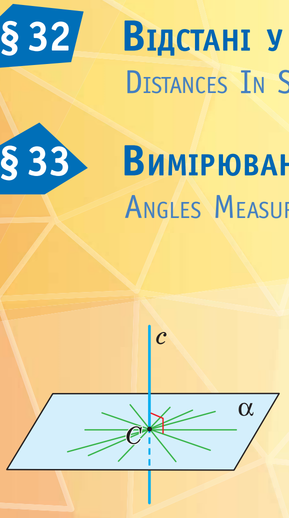
- **Паралельні (не мають спільних точок або суміщаються)**

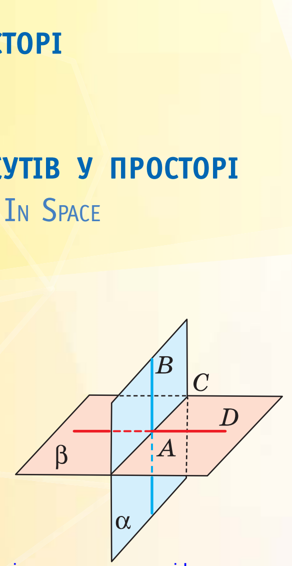


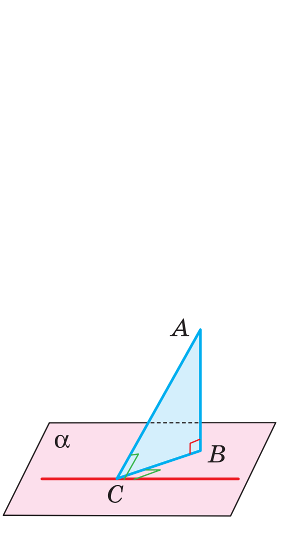
РОЗДІЛ 5.
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

CHAPTER 5.
STRAIGHT LINES AND PLANES PERPENDICULAR IN SPACE

У цьому розділі розглянемо такі теми:







§ 28. Кут між прямими. Перпендикулярність прямих

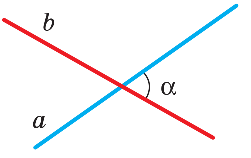
Розгляньте малюнок 250 і згадайте, як можуть розташовуватися у просторі дві прямі. Спробуйте уявити, які кути утворюють ці прямі в кожному випадку.

Мал. 250

Щоб увести поняття *кута між прямими* у просторі, слід розглянути три випадки:

- прямі перетинаються;
- прямі паралельні;
- прямі мимобіжні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (мал. 251). Кутову міру не найбільшого з них називають *кутом між даними прямими, що перетинаються*. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.



Мал. 251

Позначають кут між прямими a і b символом $\angle(ab)$.

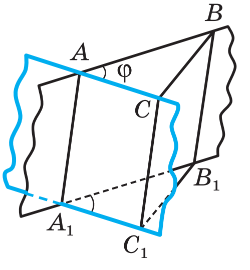
Зауваження. Кут між прямими — не фігура, а кутова міра, величина.

ТЕОРЕМА 9

Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 252).

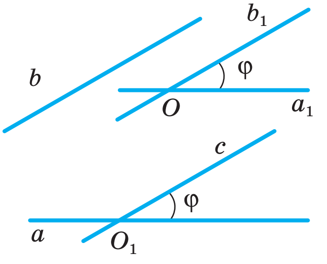


Мал. 252

Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ — кут між прямими AB і AC ($\varphi \le 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1.

Нехай прямі BB_1 і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 — у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C — паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC. □

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не виродився у відрізок.



Мал. 253

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими*. Нехай a і b — довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі a_1 і b_1, паралельні a і b (мал. 253). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже, якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 9). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$.

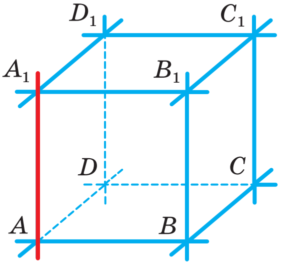
> **!** **Кутом між мимобіжними прямими** називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.

> **!** Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від 90°. Кут між паралельними прямими вважають таким, що дорівнює 0°.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 254).

Відрізки (промені) називають перпендикулярними, якщо вони належать *перпендикулярним* прямим.



Мал. 254

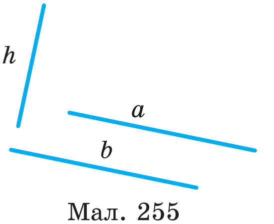
ТЕОРЕМА 10

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 255).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести. □



Мал. 255

Коли зводять багатоповерховий будинок, то спочатку будують каркас, у якому кожна горизонтальна балка перпендикулярна до вертикальної колони (мал. 256). Під прямими кутами зварюють стальні прути в арматурі залізобетонних конструкцій (мал. 257), скріплюють суміжні деталі віконної рами тощо.

Мал. 256

Мал. 257

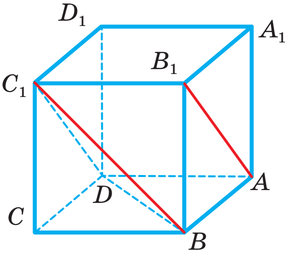
Перевірте себе

1. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Чи може кут між прямими бути тупим або розгорнутим?
4. Які дві прямі простору називають перпендикулярними?
5. Які відрізки або промені називають перпендикулярними?
6. Чому дорівнює кут між паралельними прямими?
7. Чому дорівнює кут між перпендикулярними прямими?

Виконаємо разом

1) Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

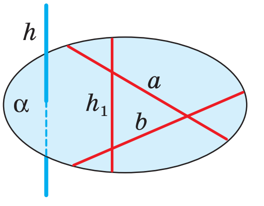
Розв'язання. Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 258). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній. Отже, кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює $60°$.



Мал. 258

2) Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.

Розв'язання. Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 259). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h. І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.



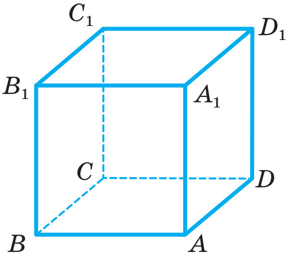
Мал. 259

Виконайте усно

1003. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану на цій прямій точку? А через точку, яка не лежить на даній прямій?

1004. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести у площині α?

1005. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?



Мал. 260

1006. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 260). Знайдіть кут між прямими:
а) DC і BC; в) AA_1 і D_1C_1; ґ) A_1C_1 і AC;
б) AB і BB_1; г) AA_1 і D_1C; д) AB і B_1D_1.

А

1007. Зобразіть куб і позначте його вершини. Випишіть ребра, перпендикулярні до: а) одного з ребер нижньої основи; б) бічного ребра; в) діагоналі верхньої основи куба.

1008. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1.

1009. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C, якщо:
а) $\angle B_1CB = 50°$; б) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

1010. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:
а) DC_1 і AB; в) B_1D_1 і C_1C;
б) A_1C_1 і AB; г) B_1D і AC.

1011. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AA_1 = 2AB$, $ABCD$ — квадрат. Знайдіть кут між прямими:
а) B_1C і AD; б) AB_1 і CD_1; в) AB_1 і A_1C_1.

1012. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

1013. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60°$? Перевірте моделюванням.

1014. Прямі a і b перетинаються під кутом 30°, а прямі a і c — під кутом 40°. Чи можуть бути перпендикулярними прямі b і c?

1015. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що $AB_1 \perp CD_1$.

1016. A, B, C — точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

1017. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо: а) $OA = OB = OC = 4$ см; б) $OA = OB = OC = a$; в) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм.

1018. **Практичне завдання.** Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної? Якщо така конструкція можлива, спробуйте її створити з дроту.

Б

1019. Дано тетраедр $ABCD$, у якому $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, M — середина AB, N — середина CD і $MN = 5$ см. Знайдіть кут між BD і AC.

1020. Доведіть, що діагоналі протилежних граней куба або паралельні, або перпендикулярні. Чи виконується це твердження для прямокутного паралелепіпеда?

1021. M — середина ребра AD правильного тетраедра $ABCD$. З точки M на прямі AB і BD опустили перпендикуляри MA_1 і MB_1. Знайдіть кути між прямими: а) A_1M і BD; б) B_1M і AB; в) MA_1 і MB_1; г) MA_1 і AK, де K — середина BD.

1022. K і P — середини ребер AB і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кути між прямими:
а) KP і B_1D_1; б) KP і AC; в) KP і CD; г) KP і B_1D.

1023. Точки K і M — середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть довжину KM, якщо $AB = a$.

1024. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Його бічне ребро дорівнює $a\sqrt{3}$. Знайдіть кут між прямими:
а) AB_1 і D_1C; в) A_1C і BD;
б) AB_1 і A_1C_1; г) AB_1 і A_1D_1.

1025. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, O — точка перетину діагоналей AC і BD. Знайдіть кут між прямими:
а) OB_1 і DD_1; в) B_1O і BD_1;
б) OB_1 і A_1C_1; г) B_1O і BC.

1026. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між кутами (1–4) та їх косинусами (А–Д).

1 Кут між AA_1 і DC_1	**А** 0,5	**В** 1	**Д** 0
2 Кут між A_1C_1 і BD	**Б** $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**Г** $\frac{\sqrt{3}}{2}$	
3 Кут між CB_1 і DC_1			
4 Кут між A_1D і CB_1			

1027. $ABCD$ — тетраедр, $M \in AC$, $N \in BD$, $BC = 10{,}5$ см, $AD = 24$ см, $MN = 13$ см, $AM : MC = DN : NB = 2 : 1$. Знайдіть кут між AD і BC.

1028. У тетраедрі $ABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a і $CM = MB$ ($M \in CB$). Знайдіть кут між прямими AM і BD.

1029. $ABCD$ — тетраедр, у якому $DA = DB = DC = a$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Знайдіть кут між прямими DM і AB, якщо M — середина BC.

1030. Практичне завдання. Три стержні з'єднані зварюванням своїми серединами один до одного так, що кожний перпендикулярний до двох інших. Чи можна такого «їжака» протягти через люк, діаметр якого 1,8 м, якщо довжина і товщина кожного стержня дорівнюють відповідно 2 м і 0,1 м? Зробіть модель до задачі (у масштабі 1 : 10) і спробуйте розв'язати її дослідним шляхом, а потім підтвердіть отриманий результат логічними міркуваннями.

Вправи для повторення

1031. Через точку M проведіть пряму, паралельну кожній з двох площин, що перетинаються.

1032. Дорожні знаки «Крутий спуск» (мал. 261), «Крутий підйом» (мал. 262) встановлюють для попередження відповідно про крутий (або затяжний) спуск або підйом. Вказівка про величину спуску або підйому подається не в градусах, а в процентах. Так, наприклад, значення 12 % означає, що кожні 100 м дорога знижується або піднімається на 12 м. Використовуючи малюнки, знайдіть відповідні величини кута спуску і підйому в градусах.

Мал. 261

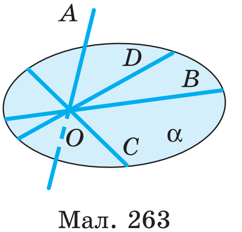
Мал. 262

1033. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см.

§ 29. Перпендикулярність прямої і площини

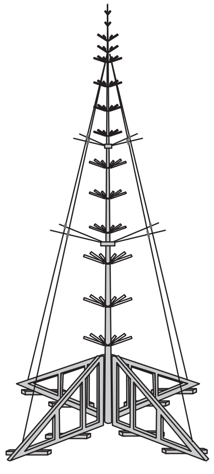
Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину.

Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у площині α (мал. 263). Кути AOB, AOC, AOD, ... можуть бути різними. Заслуговує на увагу випадок, коли всі ці кути прямі. У цьому разі кажуть, що пряма AO перпендикулярна до площини α. Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.



Мал. 263

Матеріальною моделлю цього випадку є каркас штучної ялинки з хрестовиною (мал. 264).



Мал. 264

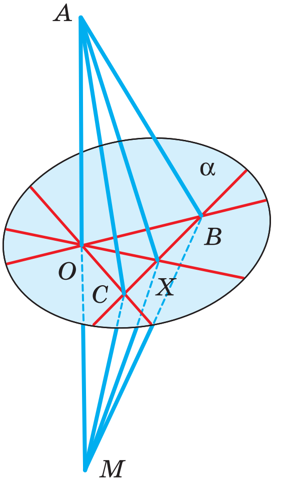
Пряму називають **перпендикулярною до площини**, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.

ТЕОРЕМА 11

(Ознака перпендикулярності прямої і площини.) **Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 265). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. На прямій OA по різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. $\triangle ABM$ і $\triangle ACM$ рівнобедрені, оскільки їх медіани BO і CO є також висотами. Отже, $AB = MB$ і $AC = MC$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle MBC$, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX — за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp OX$. Що й треба було довести. □



Мал. 265

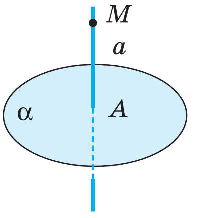
З доведеної теореми випливають такі наслідки.

- Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, що проходить через ці дві прямі.
- Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.
- Якщо пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони.

!

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

Розгляньте малюнок 266. Оскільки пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці A, а точка M лежить на прямій a, то відрізок MA — перпендикуляр, опущений з точки M на площину α. Точка A — основа перпендикуляра.



Мал. 266

Деякі стереометричні твердження схожі на твердження планіметричні, тільки в них замість поняття «пряма» треба написати «площина».

У планіметрії	**У стереометрії**
• Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. • Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.	• Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні. • Через дану точку проходить тільки одна площина, перпендикулярна до даної прямої.

Подібних *аналогій* між твердженнями планіметрії і стереометрії можна навести багато. Корисно помічати їх. Науковці на такі аналогії звертають особливу увагу.

С. Банах: «*Математик — це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями*».

Й. Кеплер: «*Я найбільше ціную Аналогії, моїх найвірніших учителів. Вони знають усі секрети Природи, і ними найменше треба нехтувати в Геометрії*».

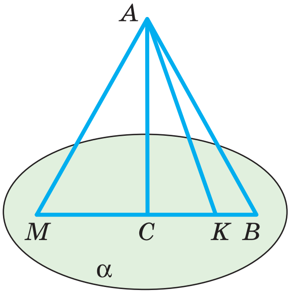
Перевірте себе

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Що називають перпендикуляром, опущеним з даної точки на площину?

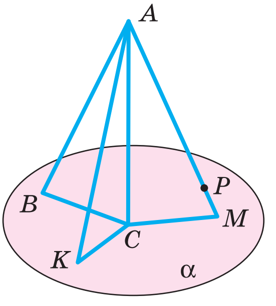
Виконаємо разом

1) Три прямокутні трикутники мають спільний катет і спільну вершину прямого кута. Доведіть, що інші їхні катети лежать в одній площині.

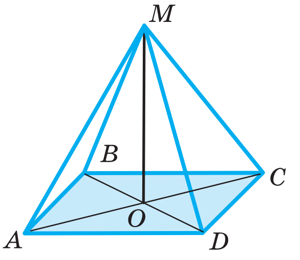
Розв'язання. Нехай усі три трикутники зі спільним катетом AC і спільною вершиною прямого кута C лежать в одній площині (мал. 267). Тоді їхні другі катети CB, CK і CM лежать на одній прямій, а отже, в одній площині, яка проходить через цю пряму.



Мал. 267



Мал. 268



Мал. 269

Якщо, наприклад, трикутники ACB і ACK не лежать в одній площині, то три точки C, B і K визначають деяку площину α, перпендикулярну до AC (мал. 268). Пряма AM перетинає α в деякій точці P. Оскільки $AC \perp \alpha$ і $CP \in \alpha$, то $\angle ACP = 90°$. За умовою і $\angle ACM = 90°$. Отже, точка M збігається з точкою P, тому і катет CM лежить у площині α.

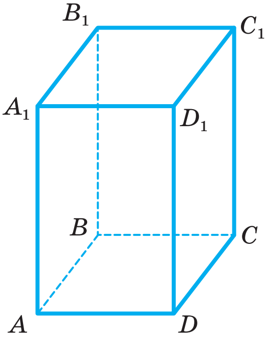
2) O — центр прямокутника $ABCD$. Точка M однаково віддалена від усіх вершин прямокутника (мал. 269). Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника. Знайдіть довжину відрізка MO, якщо сторони прямокутника мають довжини 8 см і 6 см, а $MA = 13$ см.

Розв'язання. Трикутники AMC і DMB — рівнобедрені, отже, $MO \perp AC$ і $MO \perp DB$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $MO \perp (ABC)$.

Якщо в даному прямокутнику $AB = 6$ см, а $BC = 8$ см, то за теоремою Піфагора $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, або $AC = 10$ см. Оскільки $MO \perp AC$, то за теоремою Піфагора $MO^2 = MA^2 - AO^2 = 169 - 25 = 144$.

Звідси $MO = 12$ см.

Виконайте усно



Мал. 270

1034. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 270). Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані ABB_1A_1.

1035. Пряма a перпендикулярна до двох прямих площини α. Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

1036. Скільки: а) площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку; б) прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку?

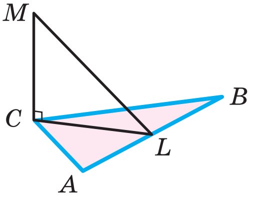
1037. У якій площині обертається шліфувальний диск, якщо його вісь розташована: а) горизонтально; б) вертикально?

1038. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

1039. Пряма a не перпендикулярна до площини α, але перпендикулярна до прямих l і c цієї площини. Якими є ці прямі?

А

1040. Через вершину прямого кута C трикутника ABC з катетами 6 см і 8 см до його площини проведено перпендикуляр MC (мал. 271). MC = 12 см, CL — медіана трикутника. Знайдіть ML.



Мал. 271

1041. Трикутник ABC рівносторонній, а відрізок AM перпендикулярний до його площини. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо: а) AB = 3 см, AM = 4 см; б) $AB = AM = c$.

1042. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$ = 10 см, AC = 12 см. Пряма MB перпендикулярна до AB і BC, K — середина AC. Доведіть, що $\triangle MBK$ і $\triangle MAK$ — прямокутні. Знайдіть їх площі, якщо MB = 15 см.

1043. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що AB_1C_1D — прямокутник.

1044. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1045. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $AA_1 : A_1C = m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

1046. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові; точка O, відмінна від M, — центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

1047. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини квадрата, якщо AM = 10 см, $AB = 6\sqrt{2}$ см.

1048. O — центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, MO — перпендикуляр до площини прямокутника. Знайдіть відстані від точки M до вершин прямокутника, якщо $OM = a\sqrt{3}$, а довжина діагоналі AC дорівнює $2a$.

1049. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 3, а його периметр — 40 см. Точка P рівновіддалена від вершин прямокутника, PA = 14 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини прямокутника.

Б

1050. Пряма MO перпендикулярна до діагоналей паралелограма $ABCD$, які перетинаються в точці O. Установіть вид $\triangle MOK$. Знайдіть MO і MK, якщо $K \in AB$, $OK = a$, $\angle OMK = \alpha$.

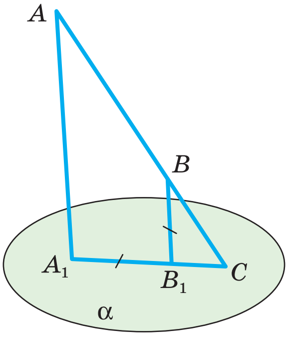
1051. Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC, MO — перпендикуляр до площини трикутника, $O \in (ABC)$. Доведіть, що O — центр кола, описаного навколо трикутника.

1052. Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC. $AB = a$, $AM = 2a$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

1053. Точка S знаходиться на відстані 13 см від вершин трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини трикутника.

1054. Відрізок AM перпендикулярний до площини рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть периметр трикутника MBC, якщо:

а) $AB = 3$ см і $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.



Мал. 272

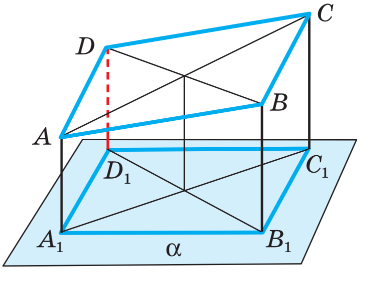
1055. Прямі AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини α, перетинають її в точках A_1 і B_1, а пряма AB — у точці C (мал. 272). Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.

1056. З кінців відрізка AB і точки M цього відрізка до площини α, яка не перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1 і MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см і:

а) M — середина AB; б) $AM : MB = 1 : 3$.

1057. З вершин паралелограма $ABCD$ на площину α опущено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (мал. 273). Знайдіть DD_1, якщо:

а) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 20$ см, $CC_1 = 13$ см;
б) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 25$ см, $CC_1 = 13$ см.



Мал. 273

1058. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

1059. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

1060. BK — пряма, проведена перпендикулярно до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата, якщо $AB = a$, $BK = b$.

Вправи для повторення

1061. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його гострий кут $30°$.

1062. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 1 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

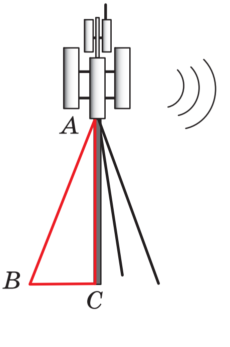
1063. **Практичне завдання.** Зобразіть різносторонній трикутник. Використовуючи послідовно осьову та центральну симетрію, побудуйте кілька цікавих орнаментів. Чи можна отримати такий самий орнамент, використавши паралельне перенесення? Перевірте на практиці.

§ 30. Перпендикуляр і похила до площини

Озирніться навколо себе і придивіться до оточуючих предметів. Ви зможете навести не один приклад їх взаємного розміщення, що характеризується властивістю «перпендикулярності».

У спортивній залі, наприклад, перпендикулярно до підлоги висить канат. Гімнастична перекладина та її стойка перпендикулярні відповідно до стіни та до підлоги (мал. 274). Не перпендикулярні до підлоги розтяжки перекладини, а також ніжки гімнастичного коня.

Мал. 274

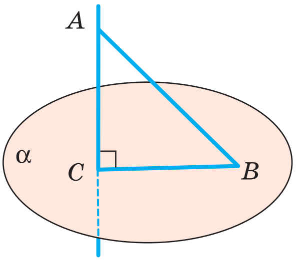


Мал. 275

На малюнку 275 зображено базову станцію стільникового оператора. Тут опора AC перпендикулярна до площини, а розтяжки нахилені до неї під деяким гострим кутом. У стереометрії відрізки AC і AB називають відповідно перпендикуляром і похилою.

Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі, бурять свердловини, проходять шахтні стволи, запускають космічні апарати. Тільки піднявшись на певну висоту, ракета-носій відхиляється в потрібному напрямі.

З попереднього параграфа ви вже знаєте, що перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.



Мал. 276

Розглянемо малюнок 276. Якщо пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці C, то відрізок AC — перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Точка C — *основа перпендикуляра* (мал. 276).

Якщо AC — перпендикуляр до площини α, а B — відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають **похилою, проведеною з точки A до площини** α. Точка B — **основа похилої**, а відрізок CB — **проекція похилої AB** на площину α.

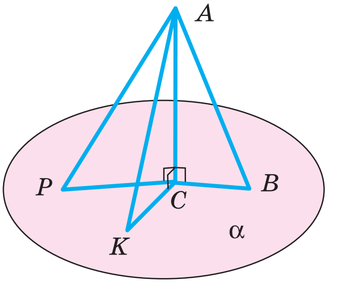
Зауважимо, що тут ідеться про прямокутну проекцію похилої. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Далі, говорячи про проекції, матимемо на увазі тільки прямокутні проекції.

ТЕОРЕМА 12

Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:
1) проекції рівних похилих рівні;
2) із двох похилих більша та, проекція якої більша;
3) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AC — перпендикуляр, а AB, AK, AP — похилі до площини α (мал. 277).



Мал. 277

1) Якщо $CB = CK$, то $\triangle ACB = \triangle ACK$ (за двома катетами). Тому $AB = AK$.

2) З прямокутних трикутників ACB і ACP маємо:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}, \quad AP = \sqrt{AC^2 + CP^2}.$$

Отже, якщо $CB < CP$, то $AB < AP$.

3) Перпендикуляр AC — катет, а будь-яка похила AB — гіпотенуза трикутника ABC. Тому $AC < AB$. Теорему доведено. □

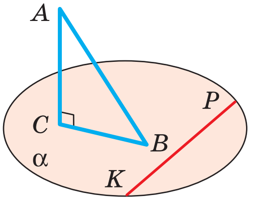
Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі та бурять свердловини. Будуючи багатоповерховий будинок, спочатку зводять каркас, у якому кожна вертикальна колона перпендикулярна до площини горизонту і до кожної горизонтальної балки.

ТЕОРЕМА 13

(Про три перпендикуляри.) **Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AC і AB — перпендикуляр і похила до площини α (мал. 278). Якщо пряма KP лежить у площині α, то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC. Тобто якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$, а якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Що й вимагалося довести. □



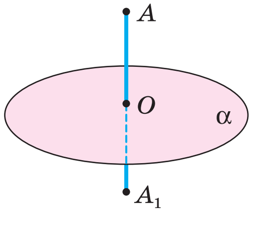
Мал. 278

! **Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.**

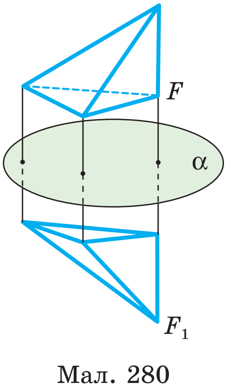
З наведених міркувань випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему про три перпендикуляри можна сформулювати й одним реченням.

Теоремою про три перпендикуляри її називають, маючи на увазі перпендикуляри $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

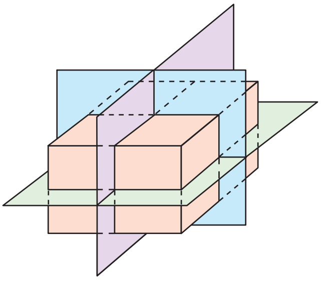
На основі перпендикулярності прямої і площини можна ввести поняття симетрії у просторі.



Мал. 279



Мал. 280


Мал. 281

Точки A і A_1 називають *симетричними відносно площини*, якщо вона перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (мал. 279).

Фігури F і F_1 називають симетричними відносно площини, якщо кожна точка фігури F симетрична відносно площини деякій точці фігури F_1, і навпаки (мал. 280).

Симетрію відносно площини використовують у техніці, будівництві, меблях, спортивних снарядах тощо.

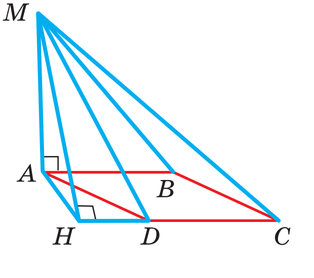
Існують фігури, які відносно деяких площин симетричні самі собі. Наприклад, кожний прямокутний паралелепіпед має три площини симетрії (мал. 281), а куб — 9. Зобразіть на малюнку кілька площин симетрії куба, які проходять через: а) середини його паралельних ребер; б) його протилежні ребра.

Перевірте себе

1. Що називають перпендикуляром до площини?
2. Що називають похилою, проведеною з даної точки до площини?
3. Що називають проекцією похилої на площину?
4. Укажіть найважливіші властивості перпендикуляра, похилої та її проекції на площину.
5. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
6. Які точки називають симетричними відносно площини?

Виконаємо разом

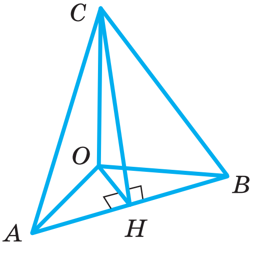
1) MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.



Мал. 282

Розв'язання. Щоб побудувати висоту трикутника MCD, потрібно побудувати перпендикуляр MH до прямої CD (мал. 282). Проведемо $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60°$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, що $HD = 0{,}5CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. За теоремою про три перпендикуляри MH і є висотою трикутника MCD, яку треба було побудувати.

2) Відрізки $OA = 15$ см, $OB = 20$ см, $OC = 35$ см попарно перпендикулярні (мал. 283). Знайдіть площу трикутника ABC.



Мал. 283

Розв'язання. Основу AB $\triangle ABC$ знайдемо за теоремою Піфагора з трикутника AOB:

$AB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, $AB = 25$ см.

Проведемо висоту CH $\triangle ABC$ і точку H з O сполучимо відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $OH \perp AB$.

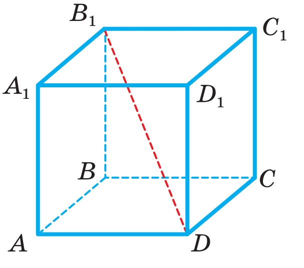
Щоб знайти довжину OH, виразимо подвійну площу $\triangle AOB$ двома способами:

$OH \cdot AB = OA \cdot OB$, $OH \cdot 25 = 15 \cdot 20$, звідси $OH = 12$ (см).

З прямокутного $\triangle COH$ за теоремою Піфагора $CH^2 = 35^2 + 12^2 = 1369$, $CH = 37$ см. Отже, шукана площа $\triangle ABC$: $S = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 37 = 462{,}5$ (см^2).

Виконайте усно

1064. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 284). Укажіть проекції відрізка B_1D на площини $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1.



Мал. 284

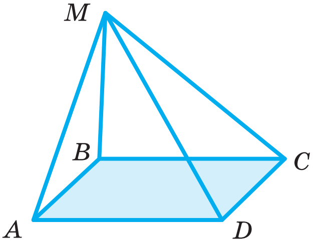
1065. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 285) $DC_1 \perp BC$, $A_1C \perp BD$, $AC \perp BD_1$.

1066. BM — перпендикуляр до площини чотирикутника $ABCD$ (мал. 285). Які з пар прямих MA і AD, MC і CD, MD і AC перпендикулярні, якщо:

а) $ABCD$ — прямокутник, відмінний від квадрата;

б) $ABCD$ — ромб, відмінний від квадрата;

в) $ABCD$ — квадрат?



Мал. 285

1067. Через точку перетину діагоналей трапеції проходить перпендикуляр до площини трапеції. Точку на цьому перпендикулярі сполучено з усіма вершинами трапеції. Чи можуть серед проведених похилих бути рівні? Чи можуть усі похилі бути рівними?

1068. Скільки площин симетрії має автомобільна шина? А диск?

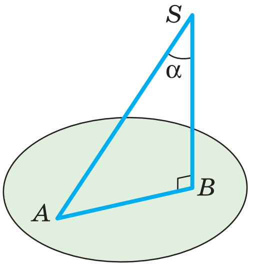
А

1069. З точки A до площини α проведено перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

1070. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу $AB = l$, причому $\angle BAC = 30°$. Знайдіть довжину перпендикуляра і проекції похилої.

1071. З точки S до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими α (мал. 286). Знайдіть: а) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої l; б) довжину похилої і її проекції, якщо перпендикуляр дорівнює h; в) довжину похилої і перпендикуляра, якщо довжина проекції дорівнює a.

1072. З точки M поза площиною проведено до цієї площини перпендикуляр і похилу. Знаючи, що похила довша за перпендикуляр на 25 см, а її проекція на площину дорівнює 65 см, знайдіть довжину похилої.



Мал. 286

1073. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. $\angle AMO = 60°$, $\angle BMO = 45°$. Знайдіть довжини похилих, якщо проекція меншої похилої дорівнює a.

1074. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ — квадрат.

1075. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

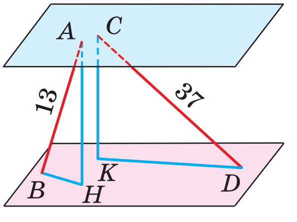
1076. MA — перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC. K — середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

1077. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$, BM — перпендикуляр до площини трикутника. Побудуйте $MK \perp AC$, $K \in AC$.

1078. $ABCD$ — прямокутник, O — точка перетину його діагоналей, MO — перпендикуляр до площини прямокутника. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін прямокутника.

1079. Через точку O перетину медіан рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр MO до його площини. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін трикутника.

1080. Два відрізки, довжини яких 13 дм і 37 дм, упираються кінцями у дві паралельні площини (мал. 287). Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції другого відрізка.

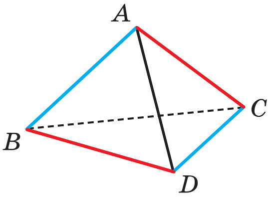


Мал. 287

Б

1081. Доведіть, що в правильному тетраедрі протилежні ребра перпендикулярні (мал. 288).

1082. Основою тетраедра $SBAC$ є прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$. Ребро AS перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди — прямокутні трикутники.



Мал. 288

1083. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки K, L, M — середини ребер AA_1, CC_1, AD відповідно, O — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OM \perp AD$ і $OD \perp KL$.

1084. K — середина сторони ромба, $MK = 12$ см — перпендикуляр, проведений до площини ромба. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей ромба. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо сторона ромба — 20 см, а кут 60°.

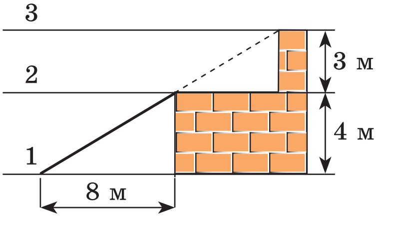
1085. O — середина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 10 см і 18 см. OS — перпендикуляр до площини трикутника, $OS = 12$ см. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки S до катетів трикутника, і знайдіть їх довжину.

1086. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, O — центр вписаного в трикутник кола, MO — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з точки M до сторін трикутника, якщо $MO = 3$ см.

1087. У трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. MB — перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до AC, якщо $MC = 15$ см.

1088. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. CM — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK \perp AB$, $K \in AB$ і $MK = 10$ см.

1089. На будівництві використовують похилий конвеєр для транспортування витратних матеріалів з рівня 1 до рівня 2, що розташований на 4 м вище від рівня 1, як показано на малюнку 289. Конвеєр підтримується опорою, основа якої віддалена на 8 м від початку конвеєра на рівні 1. Потрібно подовжити конвеєр, щоб досягти нового рівня 3, що розташований на 3 м вище від рівня 2, зберігаючи при цьому кут нахилу конвеєра. Знайдіть загальну довжину нового конвеєра та його проекцію на рівень 1.



Мал. 289

1090. Через вершину C прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ проведено площину α, $\alpha \parallel AB$. Проекція меншого катета на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції інших сторін трикутника на площину α, якщо $AB = 26$ см, а різниця катетів — 14 см.

1091. З вершин B і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через сторону AD, проведено перпендикуляри BB_1 і CC_1. Знайдіть проекції діагоналей і сторін ромба на площину α, якщо $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.

1092. **Практичне завдання.** Зобразіть на малюнку кілька площин симетрії куба, які проходять через: а) середини його паралельних ребер; б) його протилежні ребра.

Вправи для повторення

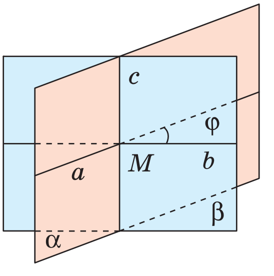
1093. Прямі a і b — мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N — на прямій b. Як розташовані прямі AM і BM?

1094. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — теж паралелограм.

1095. Підлогу кімнати, яка має форму прямокутника зі сторонами 4,7 м і 5 м, треба покрити паркетом прямокутної форми. Довжина кожної плитки паркету дорівнює 30 см, а ширина — 5 см. Скільки таких плиток потрібно для покриття всієї підлоги? Чи залежить ця кількість від способи укладки паркету? Дізнайтеся про найуживаніші способи укладки паркету і встановіть відсоток відходів для двох із них відповідно до умови задачі.

§ 31. Перпендикулярні площини

Спочатку введемо поняття кута між площинами. Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 290). Проведемо в цих площинах через точку M прямі a і b, перпендикулярні до c. Нехай кут між ними $\angle(ab) = \varphi$. Якщо в площинах α і β провести які-небудь інші прямі, перпендикулярні до c, то кут між ними також дорівнюватиме φ. (Чому?) Отже, можна прийняти таке означення.



Мал. 290

Кутом між площинами, які перетинаються, називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину.

Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Кут між площинами α і β позначають: $\angle(\alpha\beta)$, $0° \le \angle(\alpha\beta) \le 90°$.

Якщо площини α і β перпендикулярні, пишуть: $\alpha \perp \beta$.

Дві площини називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

ТЕОРЕМА 14

(Ознака перпендикулярності площин.) **Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то такі площини перпендикулярні.**

ДОВЕДЕННЯ.

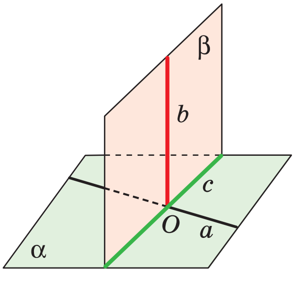
Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 291). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.

Пряма b перетинає площину α в деякій точці O. Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки $b \perp \alpha$, а прямі a і c лежать у площині α, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$. Що й треба було довести. □

Властивості перпендикулярних площин:

1. Пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

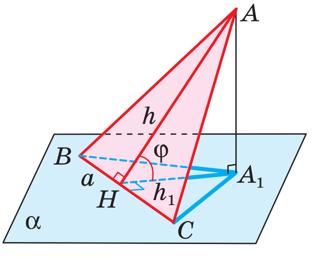
2. Площина, перпендикулярна до однієї із двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.



Мал. 291

Останню властивість можна й узагальнити. *Січна площина нахилена до паралельних площин під рівними кутами.* Спробуйте довести ці властивості самостійно.

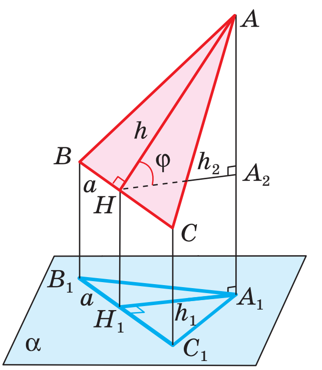
Властивості паралельних і перпендикулярних площин використовують у багатьох сферах науки й виробництва, зокрема у будівництві. Стелю і підлогу, протилежні стіни роблять найчастіше паралельними, стіну і підлогу, стіну і стелю — перпендикулярними. І протилежні грані цеглини, бруска, дошки найчастіше роблять паралельними, а суміжні — перпендикулярними. Окремі поверхи будинку роблять не тільки паралельними, а й горизонтальними, а різні колони — вертикальними. Чому?



Мал. 292

Теорему 14 можна проілюструвати таким наочним прикладом. Якщо пряма, яка проходить через центри петель дверей, перпендикулярна до площини підлоги, то як би не повертали двері, їх площина буде перпендикулярною до площини підлоги.

Для математики, креслення, техніки й будівництва велике значення має міра кута між площинами. Її використовують для визначення площ фігур при прямокутному (ортогональному) проектуванні, тобто коли проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій.



Мал. 293

Тобто якщо S і $S_{пр}$ — площі многокутника і його проекції, а кут між їх площинами дорівнює φ, то $S_{пр} = S\cos\varphi$ (мал. 292, 293).

Доведіть самостійно, використовуючи малюнки 292 і 293, що:

$$S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle ABC}\cos\varphi \text{ і } S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC}\cos\varphi.$$

Ця властивість площ і формула суттєво спрощують розв'язування багатьох абстрактних і практичних задач.

Площа проекції многокутника дорівнює площі проектованого многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.

Перевірте себе

1. Що називають кутом між двома площинами?
2. У яких межах може змінюватися кут між площинами?
3. Чому дорівнює кут між паралельними площинами?
4. Які площини називають перпендикулярними?
5. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.
6. Сформулюйте властивість про площу многокутника і його ортогональної проекції.

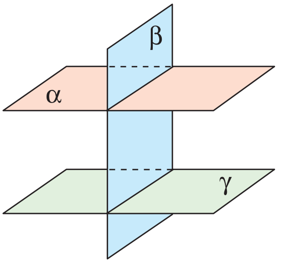
Виконаємо разом

1) Кут між двома площинами — це фігура?

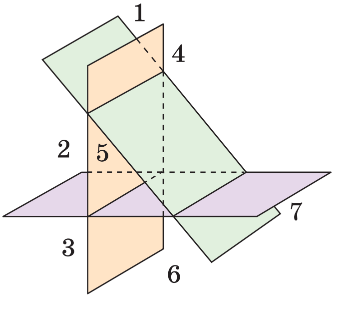
Розв'язання. Ні. Кут між площинами — не фігура, не множина точок, а величина, міра нахилу однієї площини до іншої.

2) На скільки частин може поділятися простір трьома площинами, принаймні дві з яких перпендикулярні?

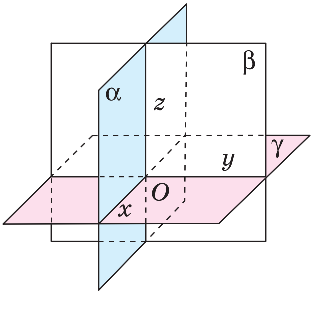
Розв'язання. Такі площини можуть поділити простір на 6, 7 або 8 частин (мал. 294–296).



Мал. 294



Мал. 295



Мал. 296

3) Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах (мал. 297). AC і BD — перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 5\sqrt{11}$ см, $BD = 24$ см, $CD = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка AB.

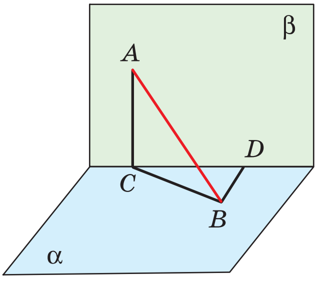
Розв'язання. Із $\triangle CDB$ $(\angle D = 90°)$ за теоремою Піфагора знайдемо BC:

$BC^2 = BD^2 + CD^2$, $BC = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25.$

Оскільки площини α та β перпендикулярні і $AC \perp CD$, то $\angle ACB = 90°$. Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ACB$ знайдемо AB:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$, $AB = \sqrt{275 + 625} = \sqrt{900} = 30.$

Отже, $AB = 30$ см.



Мал. 297

4) Ортогональною проекцією $\triangle ABC$ є прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з гіпотенузою 15 см і різницею катетів 3 см. Знайдіть площу даного трикутника, якщо кут між площинами дорівнює 30°.

Розв'язання. На малюнку 298 $\triangle A_1B_1C_1$ $(\angle C_1 = 90°)$ — ортогональна проекція $\triangle ABC$. Нехай $A_1C_1 = x$, тоді $B_1C_1 = x + 3$. За теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Тоді

$x^2 + (x + 3)^2 = 225,$

$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225,$

$2x^2 + 6x - 216 = 0,$

$x^2 + 3x - 108 = 0;$ $x_1 = 9,$ $x_2 = -12.$

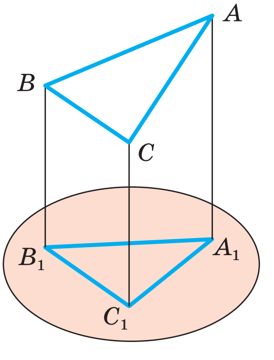
Отже, $A_1C_1 = 9$ см, тоді $B_1C_1 = 12$ см.

Площа $\triangle A_1B_1C_1$:

$$S_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1, \text{ тобто } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тоді площа $\triangle ABC$:

$$S = \frac{S_1}{\cos 30°},\ S = \frac{54 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{54 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$



Мал. 298

Виконайте усно

1096. Знайдіть міру кута між двома: а) суміжними гранями куба; б) протилежними гранями куба.

1097. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

1098. Чи правильно, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини?

1099. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

1100. Чи можуть бути не перпендикулярними дві площини, які проходять через дві перпендикулярні прямі?

1101. Площини α і β не перпендикулярні. Чи існує площина, перпендикулярна до кожної з них?

1102. Дано площину α і точку A. Скільки існує площин, перпендикулярних до α, які проходять через точку A?

1103. Чи може площа паралельної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури?

1104. Чи може площа ортогональної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури? А дорівнювати?

1105. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а площа його ортогональної проекції — 18 см^2. Знайдіть кут між площинами квадрата і його проекції.

1106. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу ортогональної проекції цього трикутника на площину, яка утворює з площиною трикутника кут 60°.

А

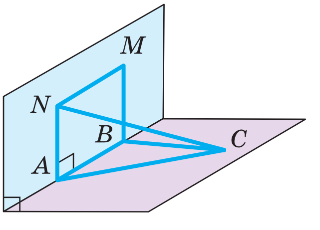
1107. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку? Зобразіть їх схематично.

1108. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві паралельні прямі? Відповідь обґрунтуйте.

1109. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть, що площини (MAC) і (MBD) перпендикулярні.

1110. O — точка перетину діагоналей ромба, OM — перпендикуляр до площини ромба. Доведіть, що площини, які проходять через точку M і діагоналі ромба, — перпендикулярні.

1111. Трикутник ABC і прямокутник $ABMN$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах (мал. 299). Доведіть, що кут CAN прямий.



Мал. 299

1112. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину перпендикулярна до цієї площини.

1113. **Практичне завдання.** Використайте як моделі площин аркуші паперу або інший підручний матеріал і змоделюйте описані нижче ситуації. Дайте відповіді на запитання:

— На скільки частин ділять простір дві перпендикулярні площини? А три попарно перпендикулярні площини?

— Чи кожна трійка попарно перпендикулярних площин має спільну точку? Чи мають вони спільну пряму?

— Чи існує чотири попарно перпендикулярні площини?

1114. Площа трикутника дорівнює 48 см^2, а його проекції — 24 см^2. Знайдіть кут між площиною проекцій і площиною даного трикутника.

1115. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка з площиною даної фігури утворює кут $60°$, якщо фігурою F є:
а) квадрат, діагональ якого дорівнює 2 см;
б) трикутник зі сторонами 3 дм, 4 дм і 5 дм;
в) правильний трикутник зі стороною a;
г) ромб, сторона якого дорівнює c, а кут $45°$;
ґ) правильний шестикутник зі стороною a.

1116. Ортогональною проекцією прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, є чотирикутник, площа якого 12 см^2. Обчисліть кут між площинами чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом?

Б

1117. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD — перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин. Знайдіть CD, якщо: а) $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, $AB = 12$ см; б) $AD = 4$ см, $BC = 7$ см, $AB = 8$ см; в) $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

1118. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD — перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 6$ м, $BD = 3\sqrt{3}$ м. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $\angle DBC = 30°$.

1119. **Практичне завдання.** Виріжте з цупкого паперу квадрат і перегніть його по діагоналі так, щоб площини утворених трикутників стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між протилежними вершинами квадрата. Від чого залежить ця відстань? Розв'яжіть задачу в загальному вигляді: квадрат $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками B і D, якщо $AB = a$.

1120. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими $60°$. Знайдіть довжину відрізка, що з'єднує їхні центри, якщо $AB = 2m$.

1121. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: а) довжину відрізка CC_1; б) довжину відрізка C_1D; в) кут між діагоналями AC і AC_1.

1122. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть довжину відрізка CD і $\angle CAD$.

1123. Знайдіть довжини сторін правильних трикутників ABC і ABD, якщо їх площини перпендикулярні і $CD = a$.

1124. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Точки M, N і K — середини ребер AB, B_1C_1 і BC відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M, N і K. Доведіть, що площина основи і площина перерізу перпендикулярні. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $BB_1 = 16$ м, $B_1D = 20$ м.

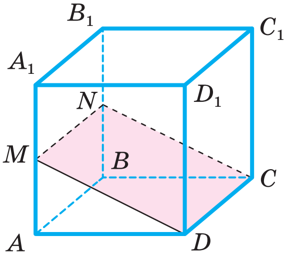
1125. Ортогональною проекцією прямокутника є квадрат. Площа прямокутника 128 см^2, а кут між площинами $60°$. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторона паралельна площині проекцій.

1126. Ортогональною проекцією правильного трикутника зі стороною 20 см на площину, що містить одну з його вершин і паралельна одній зі сторін, є рівнобедрений трикутник з бічною стороною $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

1127. Ортогональною проекцією правильного трикутника є трикутник зі сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Кут між площинами трикутників 30°. Знайдіть периметр даного трикутника.

1128. Ортогональною проекцією трапеції, площа якої $52\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

1129. У кубі через ребро основи і середини двох бічних ребер проведено площину (мал. 300). Знайдіть кут між даною площиною і площиною основи та площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.



Мал. 300

1130. **Практичне завдання.** Підготуйте презентацію про перпендикулярність площин у... (довкіллі, архітектурі, техніці, сільському господарстві). Проілюструйте на конкретних прикладах вивчені властивості перпендикулярних площин.

Вправи для повторення

1131. У прямокутному паралелепіпеді ребра $AA_1 = 5$, $AB = 4$, $BC = 3$. Знайдіть довжину похилої A_1C і кут її нахилу до площини (ABC).

1132. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут.

1133. На малюнку 301 подано поштовий блок марок «Мінерали України» (2009 р.). Знайдіть площу трикутника, прямокутника і шестикутника, зображених на малюнку, якщо формат блока — 132 × 86 мм, а кожна сторона трикутника дорівнює 47 мм. Яку частину площі блока займає площа шестикутника? Дізнайтеся більше про мінерали, зображені на марці. Які з них є у вашій місцевості?

- Кварц
- Сірка самородна
- Топаз
- a-керченіт
- Берил
- Око тигрове

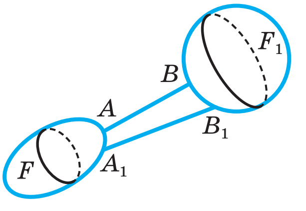
Мал. 301

§ 32. Відстані у просторі

Що таке відстань між точками, вам уже відомо. Узагальнимо це поняття на випадок довільних фігур.

Нехай дано дві фігури F і F_1 (мал. 302).

Точки $A \in F$ і $B \in F_1$ називають найближчими точками цих фігур, якщо для будь-яких точок $A_1 \in F$ і $B_1 \in F_1$ виконується нерівність $AB \le A_1B_1$.



Мал. 302

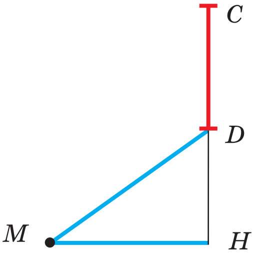
> **Відстанню між двома фігурами** називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки існують). Якщо дві фігури мають спільні точки, то вважають, що відстань між ними дорівнює 0.

Зауваження. Не будь-які дві фігури мають найближчі точки. Але ми вивчатимемо тільки такі фігури, для яких найближчі точки існують.

Розглянемо конкретні приклади.

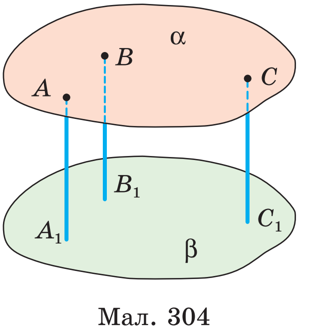
Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, коротший від будь-якого відрізка, що сполучає цю точку з даною прямою. Тому відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

Відстань від точки до відрізка не завжди дорівнює відстані від точки до прямої, якій належить цей відрізок. Вона може дорівнювати відстані від даної точки до кінця відрізка. Погляньте на малюнок 303. Відстань від точки M до відрізка DC дорівнює MD, а не MH.



Мал. 303

Відстань від точки до площини. Оскільки перпендикуляр коротший від похилої (теорема 12), то відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a, то відстань від точки A_1 до площини грані $ABCD$ дорівнює a. Але якщо A_1 — середина відрізка B_1P, то відстань від точки P до квадрата $ABCD$ дорівнює $a\sqrt{2}$. Узагалі, відстань від точки до плоскої фігури не завжди дорівнює відстані від цієї точки до площини, у якій лежить дана фігура.

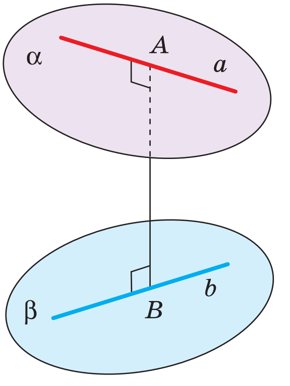


Мал. 304

Відстань між паралельними площинами. Якщо площини α і β паралельні, то перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих площин на другу, рівні (мал. 304). Справді, всі ці перпендикуляри паралельні один одному, а відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні (с. 201). Довжина перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки площини на паралельну їй площину, є відстанню між даними паралельними площинами.

З тієї ж причини відстань між прямою і паралельною їй площиною дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину.

Відстань між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 305). Існує відрізок AB, перпендикулярний до кожної з даних мимобіжних прямих a і b, його називають *спільним перпендикуляром мимобіжних прямих*.

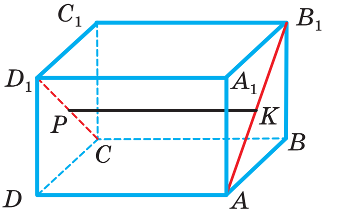


Мал. 305

Для будь-яких мимобіжних прямих існує єдиний їх спільний перпендикуляр. Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих коротший від будь-якого відрізка, що сполучає довільні точки цих прямих. Тому відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра.

Корисно пам'ятати таке. Дві мимобіжні прямі визначають пару паралельних площин (див. задачу 2, с. 197). Відстань між цими площинами дорівнює відстані між даними прямими.

Приклад. Якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, то спільним перпендикуляром мимобіжних прямих AB_1 і CD_1 є відрізок, який сполучає середини відрізків AB_1 і CD_1 (мал. 306). Довжина цього спільного перпендикуляра дорівнює BC і дорівнює відстані між даними мимобіжними прямими і паралельними площинами ABB_1A_1 і DCC_1D_1.



Мал. 306

Перевірте себе

1 Що називають відстанню між двома фігурами?

2 Чому дорівнює відстань від точки до:
а) прямої; б) відрізка; в) площини?

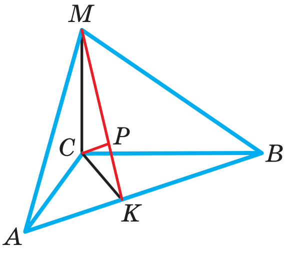
3 Як знайти відстань між паралельними площинами? А між прямою і паралельною їй площиною?

4 Що називають спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?

5 Як знайти відстань між мимобіжними прямими?

Виконаємо разом

1) Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено перпендикуляр CM до площини трикутника (мал. 307). $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $CM = 6{,}4$ см. Знайдіть відстань:
а) від точки M до прямої AB;
б) від точки C до площини (AMB).



Мал. 307

Розв'язання. а) Проведемо $CK \perp AB$ і точку K сполучимо з точкою M. За теоремою про три перпендикуляри $MK \perp AB$. Значить, довжина відрізка MK — відстань від точки M до AB. Із $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $AB = 10$ см.

Тоді за методом площ $CK = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

Із $\triangle MCK$ за теоремою Піфагора знайдемо MK:

$$MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{6{,}4^2 + 4{,}8^2} = 8 \text{ (см)}.$$

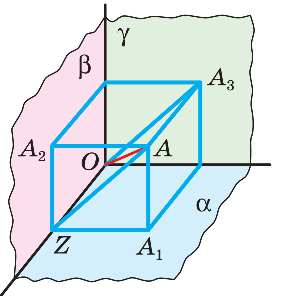
Отже, відстань від точки M до прямої AB дорівнює 8 см.

б) Оскільки $KC \perp AB$ і $KM \perp AB$, то $AB \perp (MKC)$, а тому площини (AMB) і (MKC) перпендикулярні, MK — лінія їх перетину. У площині (MKC) проведемо $CP \perp MK$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $CP \perp (AMB)$. Отже, CP — відстань від точки C до площини (AMB). Знайдемо її. Із $\triangle MCK$ за методом площ

$$CP = \frac{CK \cdot CM}{KM} = \frac{4{,}8 \cdot 6{,}4}{8} = 3{,}84 \text{ (см)}.$$

Отже, $CP = 3{,}84$ см.

2) Кожна з трьох попарно перпендикулярних площин проходить через точку O. Точка A віддалена від цих площин на 90 см, 120 см і 80 см. Знайдіть відстань OA.



Мал. 308

Розв'язання. Нехай $AA_1 = 80$ см, $AA_2 = 90$ см і $AA_3 = 120$ см — відстані від даної точки A до площин α, β і γ (мал. 308). Площина, яка проходить через точки A, A_1 і A_2, перетинає пряму перетину площин α і β у такій точці Z, що чотирикутник AA_1ZA_2 — прямокутник. Чотирикутник AA_3OZ — теж прямокутник. За теоремою Піфагора:

$$OA = \sqrt{AA_3^2 + AZ^2} = \sqrt{AA_3^2 + AA_2^2 + AA_1^2} =$$
$$= \sqrt{120^2 + 90^2 + 80^2} = 170 \text{ (см)}.$$

Виконайте усно

1134. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a, M — середина AD (мал. 309).

а) Знайдіть відстані AC, MC, MD_1.

б) Яка з відстаней AC, MC, BC найбільша, а яка — найменша?

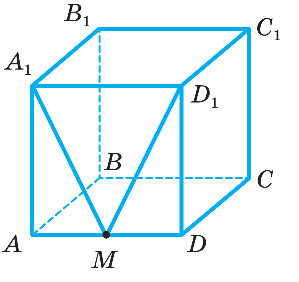
в) Порівняйте відстані MC, MD_1, MA_1.

г) Знайдіть відстань від точки M до прямих A_1D_1, B_1C_1, до площин $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C.

ґ) Знайдіть відстань між площинами $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

д) Знайдіть відстань від прямої A_1M до площини BB_1C_1C.

е) Знайдіть відстань між прямими AD і B_1C_1, CC_1 і A_1D_1.



Мал. 309

А

1135. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до даної площини рівні.

1136. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі однаково віддалені від цієї площини.

1137. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина відрізка?

1138. Точки C і D, які ділять відрізок AB на три рівні частини, віддалені від площини на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка?

1139. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від неї на b і c. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

1140. Точка P розташована на відстані 12 см і 16 см від двох перпендикулярних площин, які перетинаються по прямій m. Знайдіть відстань від точки P до прямої m.

1141. Відстані від точки M до кожної із двох перпендикулярних площин пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть ці відстані, якщо точка M віддалена від лінії перетину площин на $2\sqrt{13}$ см.

1142. MA — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB і BC, якщо $AB = 3$ дм, $MA = 4$ дм.

1143. До площини трикутника з центра вписаного в нього кола радіуса r проведено перпендикуляр завдовжки h. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

1144. Проекція точки, рівновіддаленої від сторін трикутника, на площину цього трикутника збігається з центром кола, вписаного у цей трикутник. Доведіть.

1145. З вершини B рівнобедреного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC, якщо $AC = 24$ см, $AB = BC = 20$ см.

1146. З вершини B рівнобедреного прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ до його площини проведено перпендикуляр BM. Відстань від точки M до сторони AC дорівнює 15 см, а до точки A — $3\sqrt{34}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

1147. Із центра O кола, описаного навколо прямокутного трикутника з кутом 30°, до площини трикутника проведено перпендикуляр OK. Точка K віддалена від більшого катета на 10 см. Знайдіть відстань від точки K до меншого катета, якщо $OK = 8$ см.

1148. AK — перпендикуляр, проведений до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $AK = 16$ см.

1149. Через вершину B трикутника ABC проведено перпендикуляр BM до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від вершин A і C. Знайдіть відстань від точки M до сторони AC, якщо $AC = a$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle B = 60°$.

1150. Точка M розташована на відстані 26 см від усіх сторін прямокутного трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16.

1151. Точка R розташована на відстані $2a$ від усіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки K до площини трикутника.

1152. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Точка простору O розташована на відстані 12,5 см від усіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від O до площини трикутника.

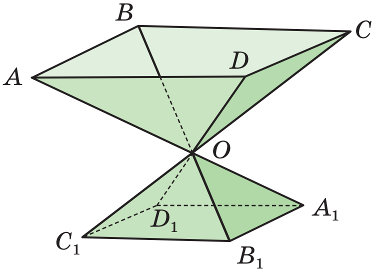
1153. Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут α. Точка простору M рівновіддалена від сторін ромба й розташована на відстані $2d$ від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

Б

1154. З точки P до площини проведено дві рівні похилі PM і PN, кут між якими 60°, а кут між їх проекціями — 120°. Знайдіть відстань від точки P до площини і до прямої MN, якщо $MN = a$.

1155. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 17 м і 10 м. Різниця проекцій цих похилих — 9 м. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

1156. Волонтери вирішили прикрасити парк «вуличними вазами», щоб висаджувати туди навесні квіти. Передбачалося каркас ваз виготовити з металевих прутів однакової довжини, зваривши їх в одній точці так, щоб тупі кути між



Мал. 310

протилежними прутами дорівнювали 120° (мал. 310). Відстань від землі до верхньої вершини вази має бути 60 см, а $CO : OC_1 = 2 : 1$. Встановіть, скільки метрів металевих стрижнів піде на виготовлення однієї такої вази. Чи вистачить зібраних волонтерами грошей (1900 грн), щоб закупити прути для виготовлення 20 таких ваз, якщо прути продають завдовжки 11,75 м, а вартість одного метра прута становить 15 грн.

1157. Точка A віддалена від однієї з двох перпендикулярних площин на x, а від другої — на y. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину даних площин.

1158. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на d від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

1159. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, на 13 м, 14 м і 17 м відповідно. Як віддалені від площини центр квадрата і вершина D?

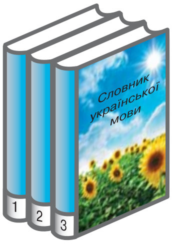
1160. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, на 6 м, 8 м і 10 м відповідно. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

1161. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

1162. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан віддалені від площини, яка не перетинає його, на 40 см, 24 см і 38 см відповідно. Знайдіть відстань від третьої вершини до площини.

1163. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.

1164. ***Задача з несподіваною відповіддю.*** На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 311). Товщина кожної книжки — 40 мм, а книжки без обкладинки — 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.



Мал. 311

1165. З точки K, розміщеної по один бік від паралельних площин α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а α — у точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка K віддалена від β на 14 м, $AK = 9$ м, $CD = 16$ м, $KC = AB$.

1166. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено дві прямі, які перетинають α в точках A і C, а β — у точках B і D відповідно. $AO = OD$, $OC = 18$ м, $OB = 32$ м. Знайдіть відстань між площинами, якщо O віддалена від β на 16 м.

1167. M, N, K — середини ребер PA, PB, PC правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть відстань між площинами (MNK) і (ABC), якщо $AB = a$.

1168. AK — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = a$, $AK = 2a$. Знайдіть відстань між прямими KB і CD, KB і AD.

1169. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи.

1170. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між: а) A_1B_1 і BD; б) CC_1 і BD.

1171. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

1172. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

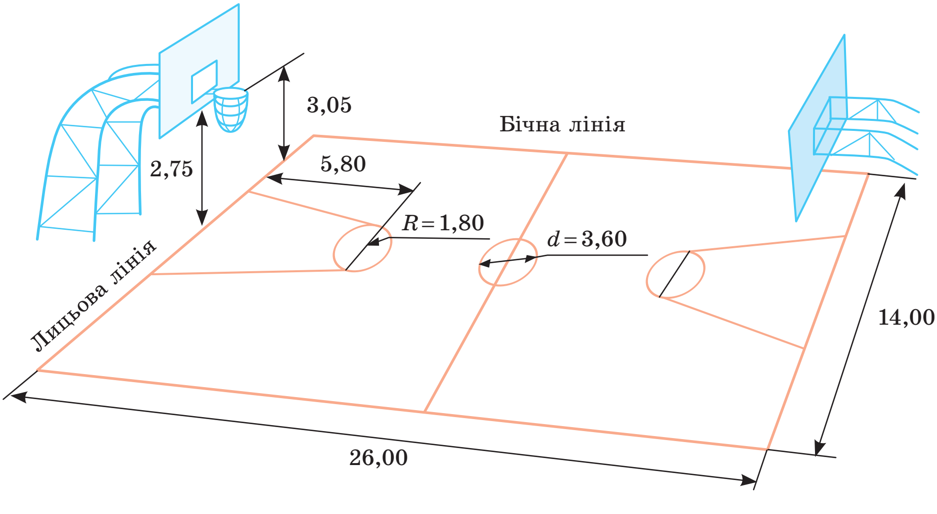
1173. Знайдіть відстань між діагоналлю куба, ребро якого дорівнює a, і будь-яким ребром, мимобіжним з цією діагоналлю.

1074. Дві перпендикулярні площини перетинаються по прямій a. В одній з площин паралельно a проведено відрізок AB, який віддалений від прямої a на 6 см. Точка K другої площини віддалена від прямої a на 9,1 см. Знайдіть відстань від точки K до AB.

1075. Через паралельні прямі a і b проведено дві перпендикулярні площини, які перетинаються по прямій c. Відстані від прямих a і b до прямої c дорівнюють відповідно 8 см і 15 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

1076. Розв'яжіть попередню задачу, якщо кут між площинами дорівнює 60°.

1077. **Практичне завдання.** Дізнайтеся про стандартні розміри баскетбольного майданчика і правила встановлення баскетбольного щита (мал. 312). Установіть приблизну відстань, яку має подолати м'яч до попадання в кошик, якщо баскетболіст, зріст якого 2 м, буде кидати м'яч двома руками від грудей, перебуваючи у центрі майданчика. З якої відстані від щита ви можете попасти м'ячем у корзину?



Мал. 312

Вправи для повторення

1178. Зобразіть паралельні площини α, β і прямі *a*, *b*, які перетинають площину α в точках *M*, *N*, а площину β — у точці *K*.

1179. З точок *A* і *B* площини α перпендикулярно до неї проведено відрізки $AK = 25$ см і $BM = 20$ см. Пряма *KM* перетинає площину α в точці *C*. Знайдіть відстань *AC*, якщо $AB = 16$ см. Розгляньте два випадки.

1180. Діаметр колоди — 12 см. Чи можна з цієї колоди витесати квадратний брус із ребром: а) 10 см; б) 8 см?

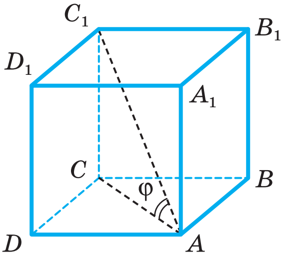
§ 33. Вимірювання кутів у просторі

Вище ми розглянули випадки розташування прямої і площини: пряма лежить у площині; пряма паралельна площині; пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї. Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами і часто зустрічаються у довкіллі (мал. 313).

Мал. 313

Кут між прямою і площиною. Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. У решті випадків кутом між прямою і площиною називають кут між прямою та її ортогональною проекцією на площину.



Мал. 314

Приклад. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 314). Знайдіть кут між прямою AC_1 і площиною його грані *ABCD*.

Проекція відрізка AC_1 на площину грані $ABCD$ — відрізок AC. Тому шуканий кут $\varphi = \angle C_1AC$. Його тангенс

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідси } \varphi \approx 35°16'.$$

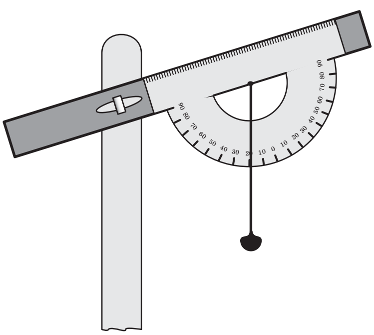
До кута між прямою і площиною близьке поняття кута між похилою і площиною.

> ! **Кутом між похилою і площиною** називають кут між похилою та її проекцією на площину.

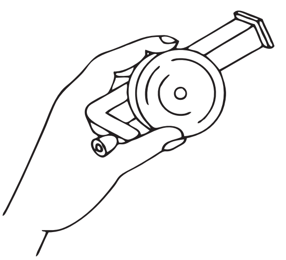
Йдеться про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$; якщо φ — кут між похилою і площиною, то $0° < \varphi < 90°$.

Можна довести, що кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

Кути між прямими і площинами часто доводиться вимірювати астрономам, геодезистам, географам, маркшейдерам, працівникам транспорту. Найпростіший саморобний прилад для вимірювання кутів між горизонтальною площиною і похилими — екліметр (мал. 315). Бувають екліметри і фабричного виготовлення (мал. 316). У його циліндричному корпусі при натиснутій кнопці вільно обертається і встановлюється за виском градуйований диск. Якщо кнопку відпустити, диск закріплюється, і на його шкалі можна прочитати градусну міру кута, який вимірюють. Якщо потрібна більша точність, кути вимірюють теодолітами (мал. 317).



Мал. 315



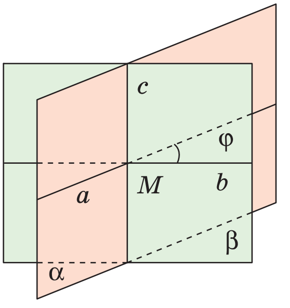
Мал. 316

Мал. 317

Теодоліт має два круги із градусними поділками (лімби). Користуючись горизонтальним лімбом, визначають кути в горизонтальній площині, вертикальний лімб дає змогу вимірювати кут між горизонтальною площиною і похилими до неї напрямами.

Кут між площинами. Ви вже знаєте з п. 30, як знайти кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Якщо площини α і β перетинаються по прямій c, то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку M прямої c можна провести прямі a і b, перпендикулярні до прямої c (мал. 318).

Кут між прямими a і b приймають за кут між даними площинами α і β. Можна довести, що міра цього кута φ не залежить від вибору точки O на прямій c. Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90°.



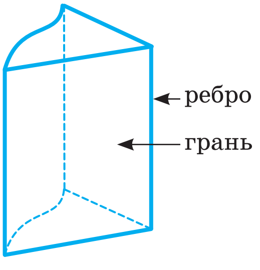
Мал. 318

Якщо кут між двома площинами дорівнює 90°, то площини перпендикулярні.

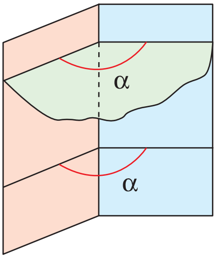
Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двогранними кутами.

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму — ребром двогранного кута (мал. 319). Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають двогранним кутом.

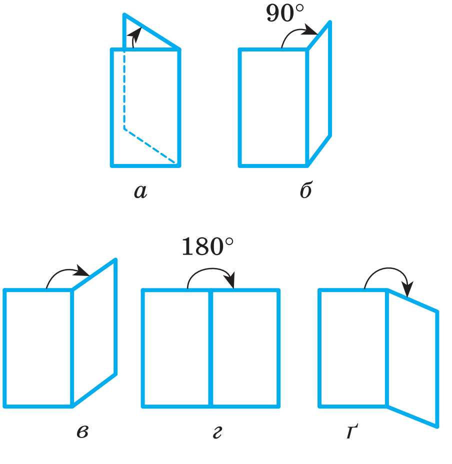
> **Двогранним кутом** називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.



Мал. 319



Мал. 320



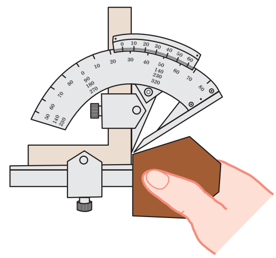
Мал. 321

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 320). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то кажуть, що це — двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 321).

Не слід ототожнювати міру двогранного кута з кутом між площинами. Кут між площинами може змінюватися в межах від 0° до 90°, а міра двогранного кута — від 0° до 360° (мал. 322).

Замість «двогранний кут, міра якого дорівнює α» нерідко кажуть коротше: «двогранний кут α». У таких випадках під двогранним кутом розуміють і певну фігуру, і відповідне її числове значення.

Мал. 322



Мал. 323

Найпростішими матеріальними моделями двогранного кута є краї різальних інструментів: зубил, стамесок, різців для токарних верстатів тощо. Вони бувають більш або менш гострими. Вимірюють такі кути кутомірами (мал. 323).

Перевірте себе

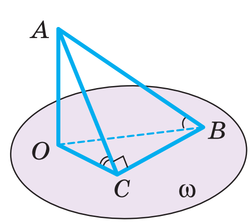
1. Що називають кутом? Які кути розглядають у стереометрії?
2. Що називають кутом між прямою і площиною?
3. Яким може бути кут між прямою і площиною?
4. Якими приладами вимірюють кут між прямою і горизонтальною площиною?
5. Що називають кутом між двома площинами?
6. Що називають двогранним кутом? Які бувають двогранні кути?
7. Що називають лінійним кутом двогранного кута?
8. У яких межах може змінюватися міра двогранного кута?

Виконаємо разом

1) Учень говорить: «Кути бувають плоскі і двогранні». Чи це правильно?

Розв'язання. Ні, неправильно. Кутом називають частину площини, обмежену двома променями із спільною вершиною. Жоден з двогранних кутів не підходить під це означення, тому не є кутом.

2) Один із катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині ω, а другий нахилений до неї під кутом 45°. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною ω.



Мал. 324

Розв'язання. Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, а AO — перпендикуляр до площини ω, яка проходить через BC (мал. 324). Тоді $\angle ACO = 45°$. Якщо $AC = a$, то $BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $AO = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Маємо: $\sin\angle ABO = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$.

Отже, $\angle ABO = 30°$.

Виконайте усно

1181. Чи може бути від'ємним косинус кута нахилу похилої до площини?

1182. На малюнку 314 AC_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Під яким кутом нахилена діагональ куба до кожної його грані?

1183. Похила AB завдовжки d нахилена до площини α під кутом 30°. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

1184. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

1185. Чи правильно, що дві непаралельні площини ділять простір на чотири двогранні кути?

1186. Кут між двома площинами дорівнює 100°. Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.

1187. Є рівні двогранні кути, міра кожного з яких дорівнює 30°. Скількома такими двогранними кутами можна заповнити простір?

1188. Якою площиною можна розрізати двогранний кут на два рівні двогранні кути? А на дві рівні фігури?

1189. Скількома площинами двогранний кут можна розрізати на 4 рівні фігури? А на 4 рівні двогранні кути?

1190. Три площини, які проходять через одну пряму, ділять простір на рівні двогранні кути. Знайдіть міру одного з них.

А

1191. Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1192. Точка A віддалена від площини α на 2 м. Знайдіть довжину похилої AB, нахиленої до α під кутом 30°.

1193. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо вершина похилої віддалена від площини на відстань, що дорівнює довжині проекції похилої.

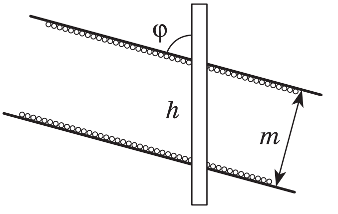
1194. Пряма AB з площиною α утворює кут 60°. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

1195. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1196. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом α, то і другу площину вона перетинає під кутом α.

1197. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?

1198. Знайдіть товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72°$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2,5$ м (мал. 325).



Мал. 325

1199. На якій глибині розташована станція метро, якщо її ескалатор довжиною 85 м нахилений до площини горизонту під кутом 42°?

1200. Кут між двома площинами дорівнює 70°. Знайдіть градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

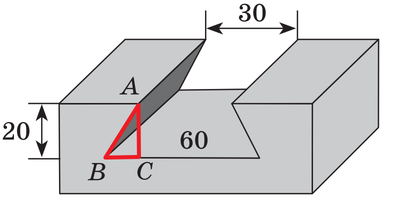
1201. Дано двогранний кут 60°. Точка A однієї його грані віддалена на 12 см від іншої. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.

1202. Точка A прямого двогранного кута віддалена від його граней на 3 дм і 4 дм. Знайдіть її відстань від ребра двогранного кута.

1203. На зображенні правильного тетраедра побудуйте зображення лінійного кута одного з його двогранних кутів.

1204. З точки C на ребрі двогранного кута 90° у його гранях проведено перпендикуляри до ребра: $CA = 3,5$ дм і $CB = 1,2$ дм. Знайдіть відстань від A до B.

1205. У металевій деталі зроблено паз, поперечний розріз якого має форму рівнобічної трапеції (мал. 326). За зазначеними на малюнку розмірами (у міліметрах) обчисліть: а) кути нахилу бічних граней паза; б) площу поперечного перерізу деталі.



Мал. 326

1206. Знайдіть кут між однією гранню двогранного кута 100° і прямою, перпендикулярною до другої грані.

1207. Визначте міру двогранного кута, якщо точка, взята на одній грані, віддалена від ребра вдвічі далі, ніж від іншої грані.

1208. З точки, взятої всередині двогранного кута, опущено перпендикуляр на ребро; він утворює з гранями кути 38°24′ і 71°36′. Визначте міру двогранного кута.

1209. Точка, взята всередині двогранного кута 60°, віддалена від обох граней на відстань a. Знайдіть відстань від точки до ребра.

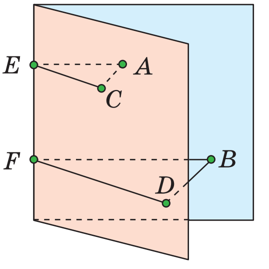
1210. A і B — точки на ребрі прямого двогранного кута; AC і BD — перпендикуляри до ребра, проведені в різних гранях. Визначте відстань CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см і $BD = 2$ см.

1211. Розв'яжіть попередню задачу, замінивши прямий двогранний кут кутом 120° і взявши: а) $AB = AC = BD = a$; б) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

Б

1212. На одній грані двогранного кута дано дві точки A і B (мал. 327). З них опущено перпендикуляри на другу грань: $AC = 1$ дм, $BD = 2$ дм та на ребра: $AE = 3$ дм і BF. Знайдіть BF.

1213. На одній грані двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра на 51 см і 34 см. Відстань від першої точки до другої грані дорівнює 15 см. Визначте відстань від другої точки до другої грані.



Мал. 327

1214. Двогранний кут дорівнює 45°. На одній грані дано точку на відстані a від другої грані. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра.

1215. Якщо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC перегнути по висоті BD так, щоб площини (ABD) і (CBD) утворили прямий двогранний кут, то лінії DA і DC стануть взаємно перпендикулярними, а BA і BC утворять кут 60°. Доведіть.

1216. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть міру двогранного кута, утвореного площинами ADC_1 і B_1BC.

1217. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC і AD попарно перпендикулярні і рівні. Знайдіть міри його двогранних кутів при ребрах BC, CD, BD.

1218. Кінці відрізка лежать на гранях прямого двогранного кута і віддалені від його ребра на 12 см і 16 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до ребра двогранного кута.

1219. З точок A і B однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на другу грань і AA_2, BB_2 — на ребро. Знайдіть довжину BB_2, якщо $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм, $BB_1 = 9$ дм.

1220. Доведіть, що всі двогранні кути правильного тетраедра рівні.

1221. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут 45°. Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.

1222. Висота крісел дитячої каруселі — 0,4 м. Вони розташовані на ланцюгах завдовжки 1,6 м, що прикріплені до металевого кола радіуса 2 м (мал. 328). Під час руху каруселі максимальне відхилення крісел від осі становить 45°. Якого радіуса слід спорудити загорожу навколо каруселі, якщо відомо, що до працюючої каруселі не можна підходити ближче, ніж на 2 м.


Мал. 328

1223. AH — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною трикутника утворюють рівні кути.

1224. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M розташована на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

1225. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює $3a$, точка M віддалена від кожної з його вершин на $2a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини даного трикутника?

1226. **Практичне завдання.** Зробіть із паперу модель поверхні двогранного кута, накресліть будь-який його лінійний кут і продемонструйте, як змінюється двогранний кут зі зміною його лінійного кута.

Вправи для повторення

1227. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін — 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.

1228. Дано точки $A(-1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(4; 3)$. Знайдіть: а) координати кінців середніх ліній $\triangle ABC$; б) довжини середніх ліній $\triangle ABC$.

1229. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $AK = KB$, CM — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK = 12{,}25$ см.

Самостійна робота 8

Варіант 1

1 Доведіть, що пряма, перпендикулярна до діагоналей паралелограма, перпендикулярна і до його сторін.

2 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:
а) BC і AA_1; б) AC і B_1D_1.

3 Точки A і B віддалені від площини α на 13 см і 25 см. Як віддалена від площини α середина відрізка AB? Відрізок AB площину α не перетинає.

Варіант 2

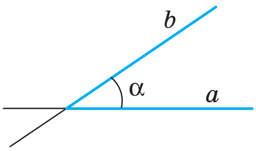
1 Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бічних сторін трапеції, перпендикулярна і до її основ.

2 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:
а) BC_1 і CD; б) BC_1 і A_1D.

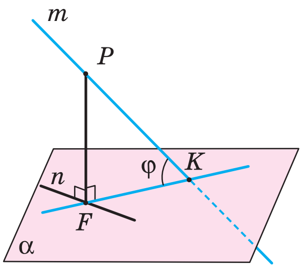
3 Кінці відрізка віддалені від площини на 8 м і 14 м. Знайдіть відстань від середини даного відрізка до площини. Відрізок не перетинає площину.

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

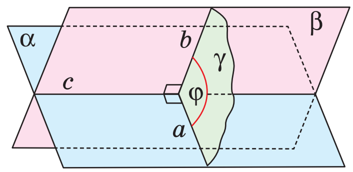
✓ Розумію, що таке кути в стереометрії:



Кут між прямими



Кут між прямою і площиною

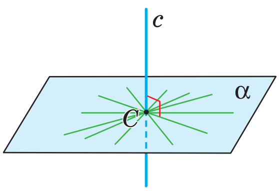


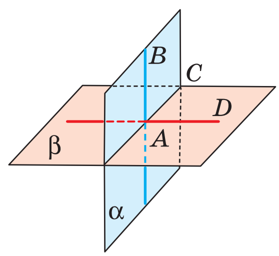
Кут між площинами

✓ Умію встановлювати та обґрунтовувати перпендикулярність прямих, прямої та площини, двох площин на основі означень і властивостей.

Пряму називають *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.

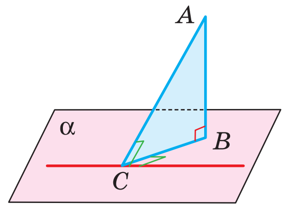
Дві площини (прямі) називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.





✓ Знаю і вмію використовувати до розв'язування задач теорему про три перпендикуляри.

Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проекції похилої.



✓ Умію застосовувати відношення між прямими і площинами у просторі до опису об'єктів навколишнього світу.

✓ Розумію, що таке відстані у просторі:
Відстань від точки до прямої (площини) дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму (площину).

РОЗДІЛ 6. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

CHAPTER 6. COORDINATES AND VECTORS IN SPACE

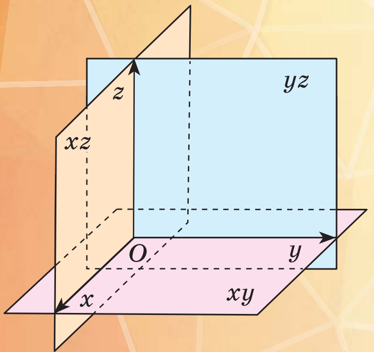
У цьому розділі розглянемо такі теми:

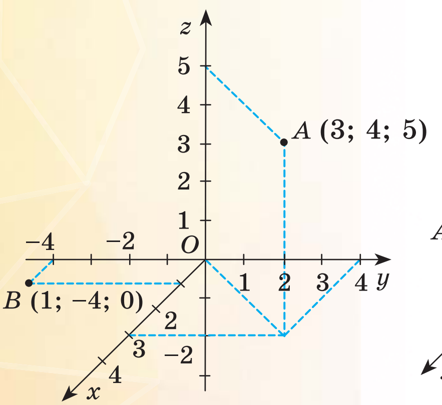
§ 34 Координати у просторі
Coordinates In Space

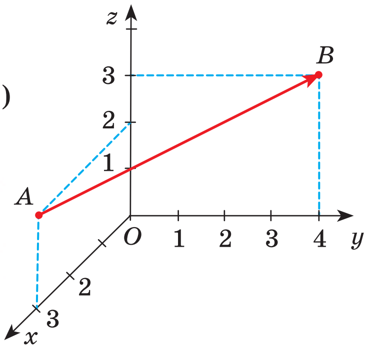
§ 35 Симетрія у просторі
Symmetry In Space

§ 36 Вектори у просторі
Vectors In Space

§ 37 Застосування векторів
Vectors Application

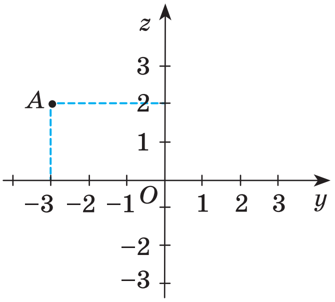




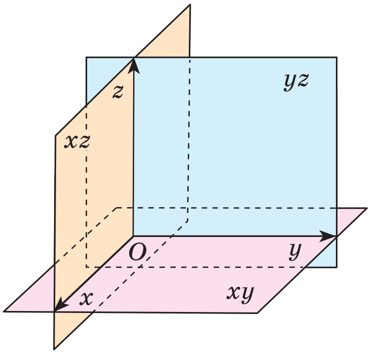


§ 34. Координати у просторі

Як відомо з планіметрії, задавши на площині декартову систему координат, можна кожній точці площини поставити у відповідність пару дійсних чисел — її координати. Наприклад, точці A (мал. 329) відповідає пара чисел -3 і 2; записують $A(-3; 2)$.



Мал. 329



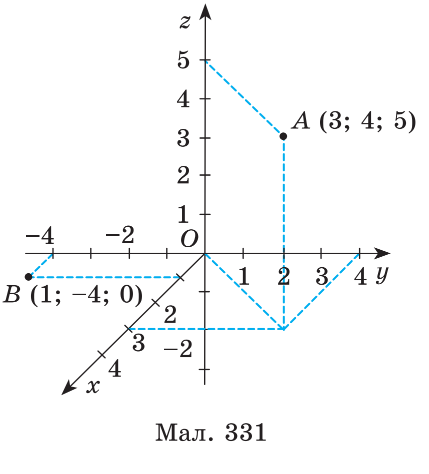
Мал. 330

Аналогічну систему координат можна задати і в просторі.

Нехай x, y, z — три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O — початку координат (мал. 330). Їх називають *координатними осями* — вісь x, вісь y і вісь z (або осі абсцис, ординат і аплікат). Кожна вісь точкою O розбивається на дві півосі — додатну, позначену стрілкою, і від'ємну.

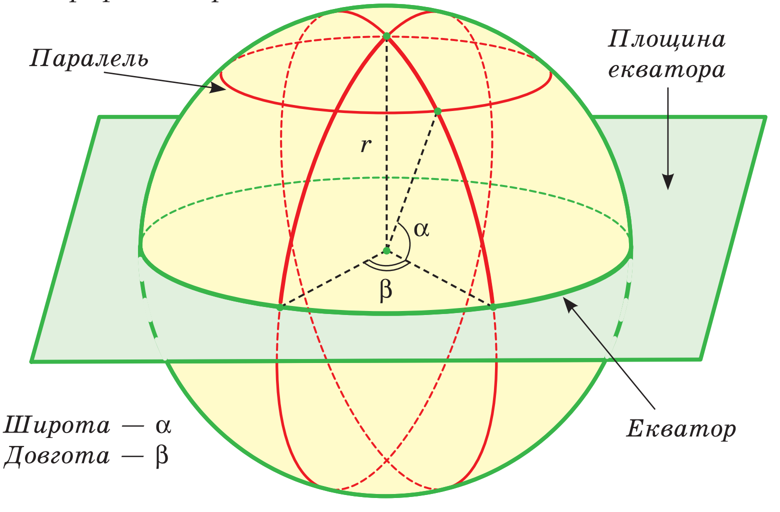
Площини, які проходять через осі x і y, x і z, y і z, — координатні площини. Позначають їх відповідно: xy, xz і yz. Координатні площини розбивають простір на 8 *октантів*.

Якщо дано таку систему координат, то кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній такій трійці чисел — єдину точку простору. Наприклад, щоб позначити в просторі точку $A(3; 4; 5)$, треба від точки O «пройти» 3 одиниці вздовж осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y і, нарешті, 5 одиниць паралельно осі z (мал. 331). А щоб знайти точку $B(1; -4; 0)$, треба від точки O «пройти» 1 одиницю довжини по осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y, але в протилежному напрямі, оскільки число -4 — від'ємне.



Мал. 331

Щоб задати місцеположення точок у просторі використовують різні системи координат. У фізиці, щоб описати рух тіл, задають три просторові координати і додаткове число, яким вимірюється час. В астрономії за допомогою координат визначають положення зір на небосхилі. У географії положення на місцевості визначають трьома числами: широтою, довготою і висотою над рівнем моря (мал. 332). Наприклад, найвища вершина Українських Карпат і найвища точка України — гора Гове́рла (мал. 333) — має координати 48°09′38″ пн. ш., 24°30′11″ сх. д., а найвища її висота над рівнем моря — 2061 м.



Мал. 332

Спеціальні системи координат використовують у медичних дослідженнях і аграрній науці, у промисловості та геодезії. Координати місцезнаходження автомобілів, кораблів, літаків визначають за допомогою сучасних навігаційних приймачів.


Мал. 333

У математиці також використовують різні системи координат — прямокутні (декартові), косокутні, циліндричні, сферичні тощо. За бажанням ви можете ознайомитися з ними, використавши додаткову літературу. У шкільному курсі геометрії розглядають прямокутну систему координат.

Маючи таку систему координат, можна розв'язувати багато стереометричних задач, подібних до тих, які розв'язують за допомогою координат на площині. Зокрема, можна довести такі твердження.

Якщо дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; x_2)$, то:

- ***середина відрізка AB — точка*** $C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}; \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$;
- ***квадрат відстані між точками A і B***
$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Знайдемо, наприклад, довжину відрізка AB та координати його середини C, якщо відомі координати його кінців — $A(3; 4; 5)$ і $B(1; -4; 0)$:

$$AB^2 = (3-1)^2 + (4+4)^2 + (5-0)^2 = 93, \ AB = \sqrt{93};$$

$$\frac{1+3}{2} = 2, \ \frac{4-4}{2} = 0, \ \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}, \text{ отже, } C\left(2; 0; \frac{5}{2}\right).$$

Перевірте себе

1. Що називають прямокутною системою координат у просторі?
2. Що називають координатними осями; початком координат?
3. Назвіть абсцису, ординату й аплікату точки $A(m; n; k)$.
4. Чому дорівнює квадрат відстані між двома точками?
5. Як знайти координати середини відрізка AB?

Виконаємо разом

1) Чому дорівнюють координати середини відрізка, кінці якого $A(4; 0; 2)$ і $B(6; 8; 6)$?

Розв'язання. Знайдемо координати точки $C(c_1; c_2; c_3)$ — середини відрізка AB.

$$c_1 = \frac{4+6}{2} = 5; \ c_2 = \frac{0+8}{2} = 4; \ c_3 = \frac{2+6}{2} = 4. \text{ Отже, } C(5; 4; 4).$$

2) Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координату точки B, якщо $A(-1; 3; 4)$, $C(2; -1; 0)$.

Розв'язання. Нехай $B(x; y; z)$. Тоді $\dfrac{x-1}{2} = 2$; $\dfrac{y+3}{2} = -1$; $\dfrac{z+4}{2} = 0$.

Маємо: $x - 1 = 4$, $y + 3 = -2$, $z + 4 = 0$, звідси $x = 5$, $y = -5$, $z = -4$. Отже, $B(5; -5; -4)$.

3) Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5; -1; 6)$, $B(4; 2; -2)$, $C(-3; 7; -2)$, $D(-2; 4; 6)$ — паралелограм.

Розв'язання. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD.

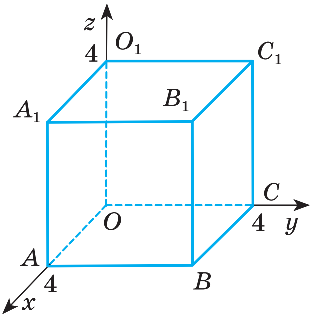
Для діагоналі AC: $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$; $y_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$; $z_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$.

Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(1; 3; 2)$.

Аналогічно для діагоналі BD: $x_2 = \dfrac{4-2}{2}$; $y_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$; $z_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$.

Тобто середина діагоналі BD має координати $O_2(1;\ 3;\ 2)$. Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

Виконайте усно



Мал. 334

1230. Знайдіть координати вершин куба, зображеного на малюнку 334. Якій з координатних площин належить кожна з точок: A, A_1, O, O_1, C, C_1?

1231. Дано точки: $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $K(0; 0; 1)$, $P(0; -8; 0)$. Які з них лежать на осі x, на осі z, у площині xy, у площині yz?

1232. Знайдіть відстані від точок $A(3;\ 4;\ 5)$ і $B(1;\ -4;\ 0)$ до координатних площин (див. мал. 331).

1233. Дано точку $K(2;\ 3;\ 4)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

1234. Дано точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(3;\ -6;\ 7)$. Знайдіть координати середини відрізка AB.

1235. Чим є геометричне місце точок простору, для яких дорівнює нулю:

а) перша координата;
б) друга координата;
в) третя координата;
г) перші дві координати;
ґ) другі дві координати;
д) перша і третя координати;
е) всі три координати.

А

1236. Побудуйте в прямокутній системі координат точки: $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 3)$. Знайдіть довжину відрізка AB.

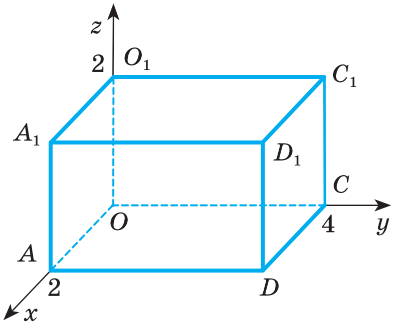
1237. Установіть відповідність між заданими точками (1–4) та об'єктами (А–Д), яким ці точки належать.

1 $A_1\ (3;\ 0;\ -4)$	**А** Площина xy
2 $A_2\ (0;\ -3;\ -1)$	**Б** Вісь аплікат
3 $A_3\ (-5;\ -1;\ 0)$	**В** Площина yz
4 $A_4\ (-6;\ 0;\ 0)$	**Г** Площина xz
	Д Вісь абсцис

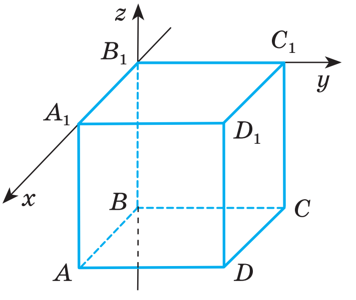
1238. Побудуйте в прямокутній системі координат точки: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 3)$, $C(0;\ 5;\ -4)$, $D(4;\ -3;\ 0)$, $E(2;\ 6;\ 4)$, $F(6;\ -2;\ -6)$. Знайдіть довжину відрізків AD, BE, CF.

1239. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин: $A(1; 0; 5)$, $B(-4; 0; 2)$, $C(4; 0; -2)$, $D(1; 3; 1)$. У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра? Знайдіть довжину бічних ребер тетраедра: DA, DB, DC.

1240. Прямокутний паралелепіпед $AOCDA_1O_1C_1D_1$ розташований у системі координат, як показано на малюнку 335. Визначте координати: а) його вершин; б) середин його ребер.



Мал. 335



Мал. 336

1241. У прямокутній системі координат розташовано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, як показано на малюнку 336. Вершина B_1 — початок координат, а ребро куба дорівнює 1. Знайдіть координати:

а) його вершин; б) середин його ребер.

1242. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:

а) $A(-1; 0; 6)$, $B(1; 2; 10)$;
б) $A(0; 4; -6)$, $B(2; 2; 2)$;
в) $A(-2; 4; 2)$, $B(-2; -4; 2)$.

1243. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:

а) $C(-4; 0; 2)$, $D(4; 0; -2)$; б) $C(-4; 2; -8)$, $D(4; -2; -8)$?

1244. На якій координатній осі лежить середина відрізка MN, якщо:

а) $M(2; 4; -6)$, $N(-2; 7; 6)$; б) $M(-3; 0; 7)$, $N(-3; 0; -7)$?

1245. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:

а) $K(1; 1; 4)$, $P(4; 0; -4)$; б) $K(-6; 2; 4)$, $P(5; -2; 3)$?

1246. Дано точки $A(8; -5; -4)$ і $C(2; 1; 10)$. Знайдіть координати такої точки B, щоб точка C була серединою відрізка AB.

1247. Точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть координати вершин A і C, якщо $B(-2; 0; 4)$, $M(3; 9; -2)$, $N(-1; -4; 0)$.

1248. Установіть відповідність між точками (1–4) і їх відстанню до осі аплікат (А–Д).

1	$A(-5; 12; 2)$	**А**	17
2	$C(3; 4; 6)$	**Б**	5
3	$D(0; -6; 5)$	**В**	6
4	$B(-8; -15; 0)$	**Г**	13
		Д	2

1249. Дано точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$ і $C(3; 1; 2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

Б

1250. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(-1; -3; 18)$, $B(-2; 2; 12)$, $C(3; 3; -10)$, $D(4; -2; -4)$;
б) $A(4; -2; -6)$, $B(-6; 2; 8)$, $C(2; -3; 9)$, $D(12; -7; -4)$?

1251. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$ якщо:
а) $A(2; 4; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$;
б) $A(-7; 5; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$.

1252. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершин C і D, якщо $A(-1; 8; -2)$, $B(-4; 6; 5)$, $O(1; 0; 2)$.

1253. Задано точки $B(-2; 6; 3)$ і $K(3; 4; -2)$. Знайдіть відстань:
а) від початку координат до кожної з точок B і K;
б) між точками $B(-2; 6; 3)$ і $K(3; 4; -2)$.

1254. Яка з точок — $A(2; -1; -5)$ чи $B(-2; 1; 6)$ — лежить ближче до початку координат?

1255. Чи є точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ і $C(3; 4; 5)$ вершинами трикутника?

1256. Дано точки $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 3; 1)$ і $C(3; 1; -2)$. Знайдіть: а) периметр трикутника ABC; б) довжини медіан трикутника.

1257. Дано точки $M(0; 1; 1)$, $N(2; -1; 3)$ і $P(-1; k; 0)$. При якому значенні k $MP = NP$?

1258. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A(4; -1; 3)$ і $B(1; 3; 0)$.

1259. Знайдіть довжину медіани BM трикутника ABC, якщо $A(-2; 3; 6)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 1; 0)$.

1260. Знайдіть довжини середніх ліній $\triangle EFK$, заданого координатами своїх вершин: $E(-1; 4; 2)$, $F(-3; 2; -2)$, $K(1; -2; -2)$.

1261. Точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо $B(2; 0; -4)$, $M(3; -1; 2)$, $N(1; -4; 0)$.

1262. AM — медіана $\triangle ABC$. Знайдіть довжину медіани BN, якщо $A(2; -4; 2)$, $C(0; 0; 6)$, $M(1; 2; 4)$.

1263. Установіть вид $\triangle ABC$ та знайдіть його периметр і площу, якщо:
а) $A(5; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 5)$;
б) $A(-2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(-2; 4; 0)$;
в) $A(2; 4; -1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(5; 1; 2)$.

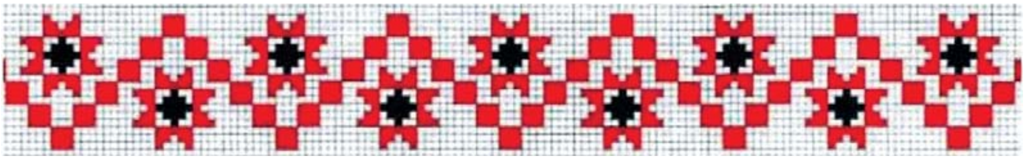
1264. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ і знайдіть його площу, якщо:
а) $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$;
б) $M(6; 8; 2)$, $N(2; 4; 3)$, $P(4; 2; 8)$, $K(8; 6; 7)$.

Вправи для повторення

1265. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 9, 15 і 21 см.

1266. Дано точку $A(1; -2)$. Знайдіть координати точки, симетричної даній відносно: а) початку координат; б) координатних осей.

1267. Розгляньте орнаменти, зображені на малюнках 337 і 338. Які види симетрій використані в цих орнаментах. Створіть свій орнамент, використавши дві геометричні фігури і різні види симетрій.



Мал. 337

а

б

Мал. 338

§ 35. Симетрія у просторі

На малюнках 337 і 338 зображені українські орнаменти, побудовані на основі центральної та осьової симетрії. З цими видами перетворень площини ви ознайомилися в 9-му класі. У просторі також розглядають аналогічні геометричні перетворення.

Означення симетрії відносно точки, відоме з планіметрії, залишається правильним і для стереометрії.

Перетворення, при якому кожна точка даної фігури відображається на точку, симетричну їй відносно O, називають *симетрією відносно точки* O, або *центральною симетрією*.

Симетрія відносно точки відображає пряму на паралельну пряму, площину — на паралельну площину, трикутник — на трикутник, що дорівнює йому.

!

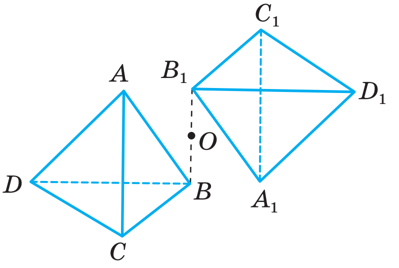
Точки A і A_1 називають **симетричними відносно точки** O, якщо O — середина відрізка AA_1.

Точка O — центр симетрії.

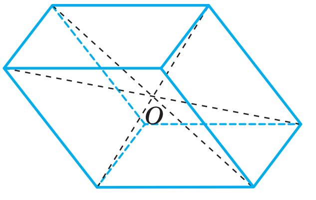
!

Якщо симетрія відносно деякої точки O відображає дану фігуру на ту саму фігуру, таку фігуру називають **центрально-симетричною**, а точку O — її **центром симетрії.**

Наприклад, якщо дано тетраедр $ABCD$ і точку O (мал. 339), то, побудувавши точки A_1, B_1, C_1, D_1, симетричні вершинам даного тетраедра відносно O, дістанемо вершини нового тетраедра $A_1B_1C_1D_1$, симетричного даному.



Мал. 339

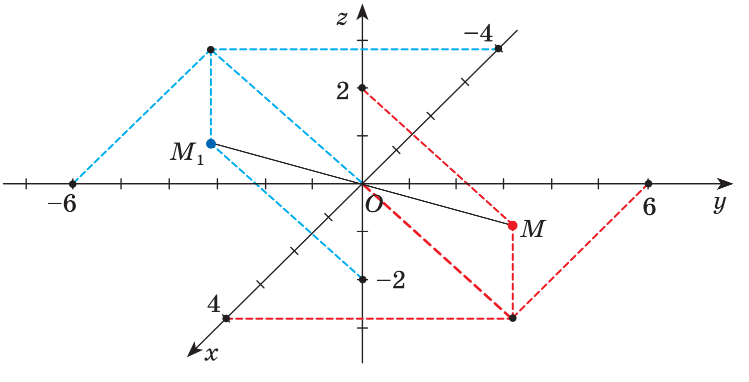


Мал. 340

Прикладом центрально-симетричної фігури є кожний паралелепіпед. Точка перетину діагоналей — його центр симетрії (мал. 340).

З центрально-симетричними предметами ви часто зустрічаєтеся в побуті, під час занять спортом, на відпочинку тощо (мал. 341).

Мал. 341



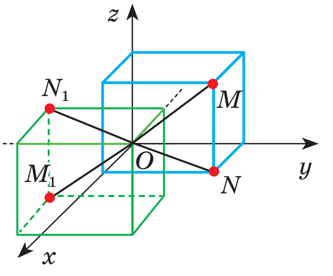
Мал. 342

На окрему увагу заслуговує симетрія відносно точки в системі координат. На малюнку 342 зображено точки M і M_1, які є симетричними відносно початку координат. Запишемо їх координати: $M(4; 6; 2)$ і $M_1(-4; -6; -2)$. Як бачимо, відповідні координати цих точок є протилежними числами. Така властивість координат точок, симетричних відносно початку координат, виконується для всіх точок на площині і в просторі. Зверніть увагу на подану нижче таблицю 6.

Таблиця 6

Симетрія відносно початку координат	
на площині	**у просторі**
$M(x;\ y)$ і $M_1(-x;\ -y)$	$M(x;\ y;\ z)$ і $M_1(-x;\ -y;\ -z)$

Використовуючи властивість точок, симетричних відносно початку координат, можемо побудувати складніші фігури, симетричні заданим, відносно початку координат. Наприклад, на малюнку 343 зображено два каркасні куби, симетричні один одному відносно початку координат. Симетричними відносно початку координат будуть і відрізки MN і M_1N_1. Зверніть увагу, точка N лежить у площині xy і симетрична їй точка також лежить у цій площині. Чому?

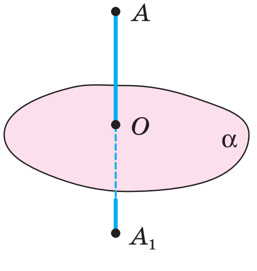


Мал. 343

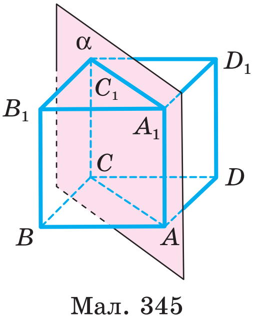
Перетворення, яке відображає кожну точку фігури на точку, симетричну їй відносно даної площини, називають *симетрією відносно площини*.

!

Точки A і A_1 називають **симетричними відносно площини**, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка AA_1 і ділить його навпіл (мал. 344).



Мал. 344

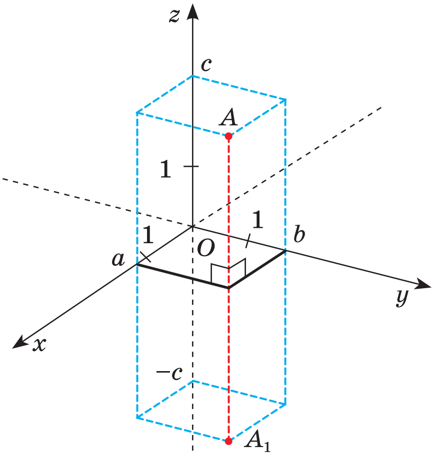


Мал. 345

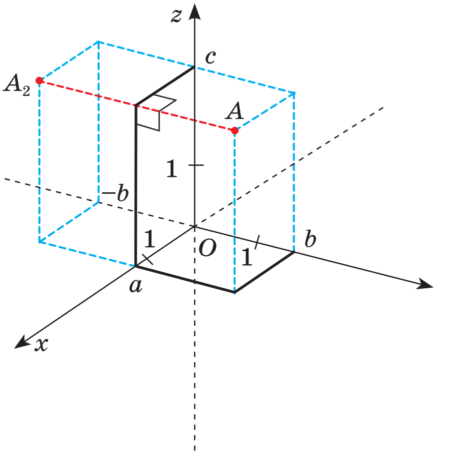
Розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і площину α, яка проходить через його ребра AA_1 і CC_1 (мал. 345). Симетрія відносно площини α точки B і B_1 відображає на D і D_1, ребро BB_1 — на ребро DD_1, грань ABB_1A_1 — на грань ADD_1A_1, кожну внутрішню точку X — на внутрішню точку X_1 цього самого куба. Говорять, що симетрією відносно площини α даний куб відображається *на себе*.

Симетрія відносно площини відображає пряму на пряму, площину — на площину, трикутник — на трикутник, що дорівнює йому.

Розглянемо симетрію відносно координатних площин. На мал. 346 зображено точки A і A_1, симетричні відносно площини xy, а на малюнку 347 — точки A і A_2, симетричні відносно площини xz. Проаналізуємо, які координати мають точки A, A_1, A_2: $A(a, b, c)$, $A_1(a, b, -c)$, $A_2(a, -b, c)$. Побудуйте самостійно точку A_3, симетричну точці A відносно площини yz. Отримаємо $A_3(-a, b, c)$.



Мал. 346



Мал. 347

Залежність між координатами точок, симетричних відносно координатних площин, подано у таблиці 7. Аналогічні залежності характерні на координатній площині для симетрії відносно координатних осей. Складіть подібну таблицю самостійно.

Таблиця 7

Симетрія відносно	**Точка $A(x; y; z)$**
Площини xy	$A_1(x; y; -z)$
Площини xz	$A_2(x; -y; z)$
Площини yz	$A_3(-x; y; z)$

Якщо деяка фігура симетрією відносно площини α відображається на себе, цю фігуру називають *симетричною відносно площини*, а α — *площиною симетрії* даної *фігури*. Наприклад, правильна трикутна призма має чотири площини симетрії, а куля — безліч.

Симетрію відносно площини називають ще відображенням у площині. Пригадайте, як відображаються фігури у дзеркалі чи на поверхні спокійної водойми: озера, річки тощо (мал. 348).


Мал. 348

Симетричні відносно площини деякі меблі, прикраси, спортивні знаряддя, молотки, рубанки, стамески, лопати, викрутки, цеглини, труби, підшипники і багато інших знарядь праці і механізмів, а також деякі овочі, комахи тощо. Вчення про симетрію многогранників важливе для кристалографії. Виявляється, що кристал у різних напрямах має різні фізичні властивості, наприклад твердість. І визначати ці напрями допомагають дослідження симетрії кристалів.

Перевірте себе

1 Які точки називають симетричними відносно точки?
2 Як пов'язані координати точок, симетричних відносно початку координат?
3 Як побудувати точки, симетричні відносно початку координат?
4 Які точки називають симетричними відносно площини?
5 Як пов'язані координати точок, симетричних відносно координатних площин?
6 Як побудувати точки, симетричні відносно координатних площин?

Виконаємо разом

1) Точки $M(5;\ 0;\ 2)$ і $M_1(1;\ 4;\ 0\ )$ — симетричні відносно деякої точки K. Встановіть координати точки K.

Розв'язання. Нехай $K(x;\ y;\ z)$ — шукана точка. Оскільки $K(x;\ y;\ z)$ — середина відрізка MM_1, то $x = 3$; $y = 2$; $z = 1$. Отже, $K(3;\ 2;\ 1)$.

2) Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1;\ 2;\ 3)$ відносно точки $M(a;\ b;\ c)$.

Розв'язання. Нехай $A_1(x;\ y;\ z)$ — шукана точка. Оскільки $M(a;\ b;\ c)$ — середина відрізка AA_1, то $a = \frac{x+1}{2}$, $b = \frac{y+2}{2}$, $c = \frac{z+3}{2}$.

Звідки $x = 2a - 1$, $y = 2b - 2$, $z = 2c - 3$. Отже, $A_1(2a - 1;\ 2b - 2;\ 2c - 3)$.

3) Відносно якої площини симетричні точки $A(0;\ 3;\ 0)$ і $B(0;\ -3;\ 0)$?

Розв'язання. Оскільки абсциса і апліката точок A і B дорівнюють нулю, то точки лежать на осі y, яка перпендикулярна площині xz. Ординати точок A і B — протилежні числа, тому точки $A(0;\ 3;\ 0)$ і $B(0;\ -3;\ 0)$ симетричні відносно площини xz.

Виконайте усно

1268. Наведіть приклади центрально-симетричних фігур.

1269. Доведіть, що точки $A(0;\ 3;\ 4)$ і $B(0;\ -3;\ -4)$ симетричні відносно початку координат.

1270. Які з точок симетричні відносно початку координат:
а) $A(0;\ -3;\ 2)$ і $B(-3;\ 0;\ 2)$;
б) $C(3;\ -1;\ 0)$ і $E(-3;\ 1;\ 0)$;
в) $M(4;\ 4;\ 4)$ і $H(-4;\ -4;\ -4)$?

1271. Чи симетричні точки A і A_1 відносно точки O, коли відомо, що $OA = OA_1$?

1272. Чи симетричні будь-які дві точки простору відносно деякої третьої точки?

1273. Скільки площин симетрії має сфера? Як вони розміщені?

1274. Наведіть приклади фігур,симетричних відносно площини.

1275. Відносно якої координатної площини симетричні точки:
а) $A(0;\ -3;\ 2)$ і $B(0;\ -3;\ -2)$;
б) $C(3;\ -1;\ 0)$ і $E(-3;\ -1;\ 0)$;
в) $M(4;\ 4;\ 4)$ і $H(4;\ -4;\ 4)$?

А

1276. Знайдіть координати точок, симетричних відносно початку координат точкам $A(1;\ -3;\ 2)$, $B(-5;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ -1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$.

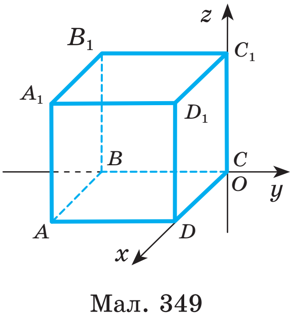
1277. Побудуйте точки A_1, B_1 і C_1, симетричні точкам A, B і C відносно початку координат, якщо: $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 2)$, $C(1;\ 1)$. Запишіть координати точок A_1, B_1 і C_1.

1278. Побудуйте точки A_1, B_1 і C_1, симетричні точкам A, B і C відносно початку координат, якщо: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 3;\ 2)$, $C(2;\ 1;\ 1)$. Запишіть координати точок A_1, B_1 і C_1.

1279. За умовою попередньої задачі знайдіть периметр трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

1280. Побудуйте фігуру, симетричну даному $\triangle ABC$ відносно: а) довільної точки O; б) вершини C; в) середини M сторони AB.

1281. У прямокутній системі координат розташовано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, як показано на малюнку 349 (вершина C — початок координат). Ребро куба дорівнює 1. Укажіть: а) координати



Мал. 349

вершини C_1 і вершини, симетричної їй відносно початку координат; б) координати вершини B_1 і вершини, симетричної їй відносно початку координат; в) координати вершини A_1 і вершини, симетричної їй відносно початку координат.

1282. Відносно яких координатних площин симетричні точки:
а) $A(4; 2; -3)$, $B(-4; 2; -3)$;
б) $M(-3; 2; 6)$, $N(-3; 2; -6)$;
в) $P(7; -2; -4)$, $K(7; 2; -4)$?

1283. Доведіть, що точки $A(2; -1; 4)$ і $B(2; 1; 4)$ симетричні відносно площини xz.

1284. Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(0; -3; 2)$, $B(-5; 0; 2)$, $C(3; -1; 0)$, $D(1; -3; 2)$ відносно:
а) площини xy; б) площини xz; в) площини yz.

1285. На площині задано точки $A(1; 2)$, $B(-3; 2)$; $C(1; 1)$. Побудуйте точки A_1, B_1 і C_1, симетричні точкам A, B і C, відносно: а) осі x; б) осі y. Запишіть координати точок A_1, B_1 і C_1.

Б

1286. Чи симетричні задані точки відносно деякої координатної площини:
а) $A(-2; 3; 4)$ і $B(2; 3; 4)$;
б) $A(12; 0; 4)$ і $B(12; 0; -4)$;
в) $A(-2; -3; -4)$ і $B(2; 3; 4)$;
г) $A(5; -1; -4)$ і $B(5; 1; -4)$?

1287. Відносно якої точки симетричні точки $A(-2; 3; 4)$ і $B(0; -1; -6)$?

1288. Знайдіть координати точки, що лежить у площині xy і рівновіддалена від точок $A(3; 1; -5)$, $B(-3; 1; 5)$, $C(0; -1; 0)$.

1289. Дано точки: $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $K(0; 0; 1)$, $P(0; -8; 0)$. Вкажіть координати точок A_1, B_1, K_1, P_1, симетричних їм відносно: а) площини xy; б) площини xz; в) площини yz. Для кожної пари відповідних точок укажіть центр симетрії.

1290. Знайдіть відстань від точки $A(3; 4; 5)$ до симетричних їй точок відносно координатних площин.

1291. Знайдіть відстань від точки $B(1; -4; 0)$ до симетричних їй точок відносно координатних площин.

1292. Знайдіть відстань від точок $A(3; 4; 5)$ і $B(1; -4; 0)$ до симетричних їм точок відносно початку координат.

1293. Дано точки: $A(0; 5; 1)$, $K(0; 0; 1)$, $P(0; -8; 0)$. Побудуйте симетричні їм точки відносно: а) осі y; б) осі z. Запишіть їх координати.

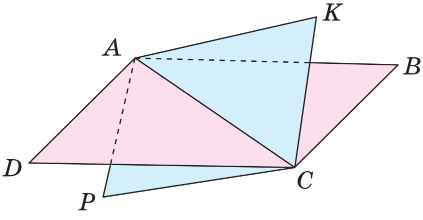
1294. Дано точки: $B(-2; 0; 0)$, $C(3; 0; 1)$, $K(0; 0; 1)$. Побудуйте симетричні їм точки відносно: а) осі x; б) осі z. Запишіть їх координати.

1295. Дано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(3; -6; 7)$. Знайдіть:
а) координати точки M — середини відрізка AB;
б) координати точки M_1 — симетричної точці M відносно:
1) площини xy,
2) площини yz;
3) площини yz;
4) початку координат.

1296. Скільки площин симетрії має куб? Зробіть відповідний малюнок.

1297. У кубі дві грані зафарбували іншим кольором. Скільки площин симетрії має такий куб? Розгляньте всі можливі випадки.

1298. **Практичне завдання.** З цупкого паперу зробіть фігуру, яка складається з двох рівних квадратів, що перетинаються по їхній спільній діагоналі (мал. 350). Установіть дослідним шляхом, чи має ця фігура: а) центр симетрії; б) площину симетрії; в) вісь симетрії. Визначте кількість вказаних об'єктів у кожному випадку (за умови, що такі існують).



Мал. 350

Вправи для повторення

1299. Дано вектори: $\overrightarrow{AB}=(5;3)$, $\overrightarrow{CD}=(-4;6)$, $\overrightarrow{MN}=(3;-2)$. Знайдіть координати векторів: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NM}$.

1300. Дано точки: $M(1; 3)$, $N(7; 5)$, $K(5; -1)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їх модулі. Установіть вид $\triangle MNK$.

§ 36. Вектори у просторі

Майже все, про що йшлося щодо векторів на площині, поширюється і на вектори в просторі. Тут їх також зображують напрямленими відрізками та позначають символами $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ тощо. У просторі вони так само означають поняття модуля вектора, нульового вектора, колінеарних векторів, суми векторів, різниці векторів, добутку вектора на число. І в просторі вектори можна додавати за правилами трикутника або паралелограма. Завжди

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$$

!

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, початок якого — $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець — $B(x_2; y_2; z_2)$, називають числа

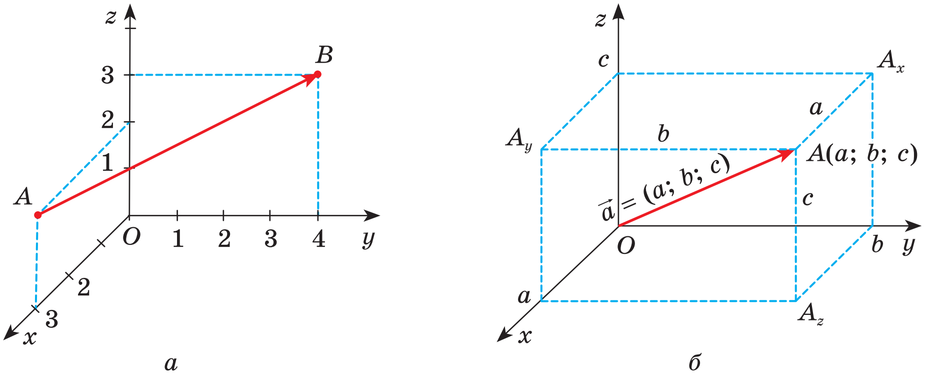
$$x = x_2 - x_1,$$
$$y = y_2 - y_1,$$
$$z = z_2 - z_1.$$

Але якщо на площині вектор задається двома координатами, то в просторі — трьома.

Записують:

$$\overrightarrow{AB}=(x; y; z) \text{ або } \vec{a}=(x; y; z).$$

Наприклад, якщо точки $A(3;\ 0;\ 2)$ і $B(0;\ 4;\ 3)$ — початок і кінець напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ (мал. 351, *а*), то $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$. Отже, $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 4;\ 1)$. Числа -3, 4 та 1 — координати вектора $\overrightarrow{AB}$.



Мал. 351

Якщо O — початок координат, а числа a, b, c — координати точки A, то ці самі числа є й координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 351, *б*).

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Різниця цих векторів:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};\quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Як би не були розміщені у просторі точки A, B, C, D, завжди

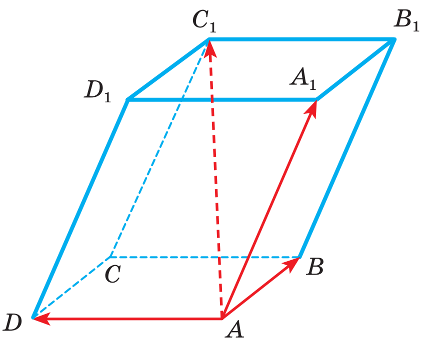
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Зокрема, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (мал. 352), то

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ (правило паралелепіпеда). Адже в цьому разі $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, тому

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}.$$

Модуль (довжину) вектора $\vec{a}$ позначають символом $|\vec{a}|$. Завжди, якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

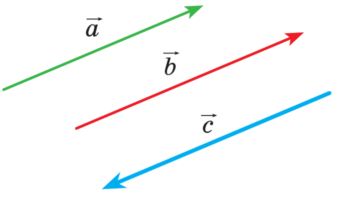


Мал. 352

Модуль будь-якого ненульового вектора — число додатне. Тільки модуль нульового вектора дорівнює нулю:

$$\vec{0} = (0;\ 0;\ 0),\quad |\vec{0}| = 0.$$

Два вектори називають **рівними**, якщо вони співнапрямлені та мають однакову довжину. Якщо вектори мають однакові довжини й протилежно напрямлені, то їх називають **протилежними**. Наприклад, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні (мал. 353), а вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежні.



Мал. 353

Два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні. Два вектори протилежні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати — протилежні числа.

! Два ненульові вектори називають **колінеарними,** якщо вони співнапрямлені або протилежно напрямлені. Нульовий вектор колінеарний з будь-яким вектором.

! Три ненульові вектори називають **компланарними**, якщо напрямлені відрізки, які їх зображають, лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Щоб помножити вектор на число, треба на це число помножити кожну координату вектора: якщо $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$, то

$$m\vec{a}=(mx;\,my;\,mz).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b};\quad (m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a};$$

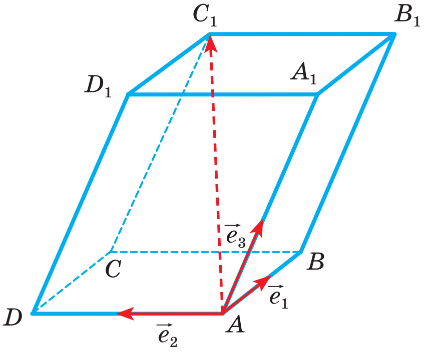
$$|m\vec{a}|=|m|\cdot|\vec{a}|.$$

Ці властивості безпосередньо випливають з правила множення вектора на число.

Якщо помножити вектор на число, то отримаємо вектор, колінеарний даному, тобто якщо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їх довжин через λ, отримаємо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, якщо вектори співнапрямлені, і $\vec{b}=-\lambda\vec{a}$, якщо вектори протилежно напрямлені. Тому маємо **ознаку колінеарності двох векторів**: ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Можна довести, що вектори $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

З 9-го класу відомо, що будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто що існує єдина впорядкована пара чисел k_1, k_2 таких, що $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$. Подібно до цього будь-який вектор простору можна розкласти за трьома даними некомпланарними векторами.



Мал. 354

Нехай дано три некомпланарні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (мал. 354). Якщо ці три одиничні вектори та довільний вектор AC_1 відкласти від однієї точки A, то за трьома напрямами одиничних векторів і напрямленим відрізком AC_1 можна побудувати паралелепіпед з діагоналлю AC_1. Завжди можна однозначно визначити таку трійку дійсних чисел k_1, k_2, k_3, що $\vec{e}_1 k_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 k_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 k_3 = \overrightarrow{AA_1}$. Тоді $\overrightarrow{AC_1} = \vec{e}_1 k_1 + \vec{e}_2 k_2 + \vec{e}_3 k_3$.

Вважають, що даний вектор $\overrightarrow{AC_1}$ *розкладено за трьома некомпланарними векторами*.

Перевірте себе

1. Як зображають вектори?
2. Що називають координатами вектора?
3. Які вектори називають нульовими? Як їх позначають?
4. Які дії можна виконувати над векторами в просторі?
5. Що називають сумою векторів?
6. Які вектори називають рівними? А протилежними?
7. Чому дорівнює різниця векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$?
8. Що називають модулем вектора? Як його знайти?
9. Які вектори називають колінеарними? А компланарними?

Виконаємо разом

1) Знайдіть довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2;\ -1;\ 5)$, $\vec{b} = (-3;\ 0;\ -2)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $2\vec{a}$ і $5\vec{b}$:

$2\vec{a} = (4;\ -2;\ 10)$, $5\vec{b} = (-15;\ 0;\ -10)$.

Тоді $\vec{c} = (4 - 15;\ -2 + 0;\ 10 - 10) = (-11;\ -2;\ 0)$.

А довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

2) При яких значеннях a і b вектори $\vec{m}\,(2;\ a;\ -5)$ і $\vec{n} = (3;\ 9;\ b)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{2}{3} = \frac{a}{9} = \frac{-5}{b}$. З рівності $\frac{2}{3} = \frac{a}{9}$ дістаємо: $a = 6$, а з рівності $\frac{2}{3} = \frac{-5}{b}$ маємо: $b = -7{,}5$. Отже, $a = 6$, $b = -7{,}5$.

3) Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a;\ 2a;\ -a)$, якщо його довжина $\sqrt{54}$.

Розв'язання. $\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{54}$, $6a^2 = 54$, $a^2 = 9$, звідки $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

$\vec{a} = (3;\ 6;\ -3)$ або $\vec{a} = (-3;\ -6;\ 3)$.

4) Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2; 3; 5)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(4; 1; -3)$.

Розв'язання. Якщо $ABCD$ паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Нехай точка D має координати $D(x; y; z)$. Тоді $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$ і $\overrightarrow{DC} = (4 - x; 1 - y; -3 - z)$. Оскільки рівні вектори мають рівні координати, то $\begin{cases} 4 - x = 1, \\ 1 - y = 1, \\ -3 - z = -3, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

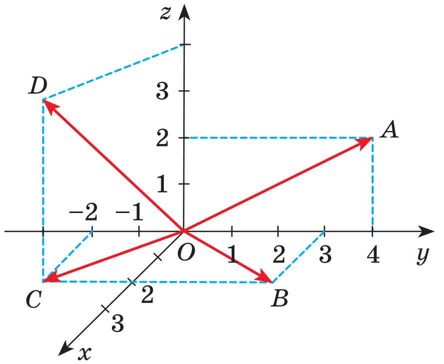
Отже, $D(3; 0; 0)$.

Виконайте усно

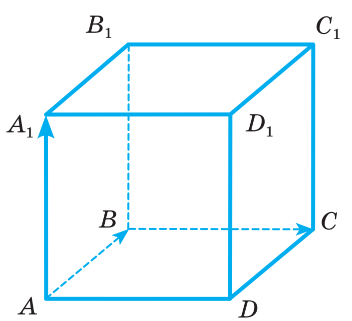
1301. Назвіть координати векторів, зображених на малюнку 355.

1302. Дано точки $A(1; 1; 1)$, $B(-7; 0; 2)$, $C(3; -1; 4)$, $O(0; 0; 0)$. Укажіть координати векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{AB}$.

1303. Які координати має вектор $\overrightarrow{MN}$, якщо $\overrightarrow{NM} = (2; -1; 4)$?



Мал. 355



Мал. 356

1304. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 356). Назвіть вектори:

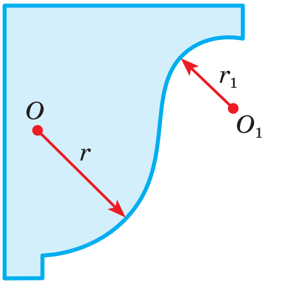
а) рівні вектору BC;

б) протилежні вектору AB;

в) колінеарні вектору AB;

г) компланарні з вектором AA_1.

1305. У кресленні напрямленими відрізками (прямолінійними стрілками) позначають радіуси кіл і дуг (мал. 357). Чи зображають такі напрямлені відрізки вектори?



Мал. 357

1306. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (-3; 0; 6)$, $\vec{b} = (2; -2; 4)$;

б) $\vec{c} = (7; -1; 2)$, $\vec{d} = (-2; 6; 4)$.

1307. Дано вектор $\overrightarrow{AB}=(a;\ b;\ c)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BA}$.

1308. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}=(-3;\ 0;\ 4)$.

1309. Помножте вектор $\vec{m}=(-8;\ 4;\ 0)$ на: 2; −3; 0,5; $-\dfrac{1}{4}$.

1310. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a}=(1; 1;\ 2)$, $\vec{b}=(2;\ 2;\ 4)$; в) $\vec{a}=(1;\ 1;\ 2)$; $\vec{b}=(-1;\ -1;\ -2)$;

б) $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 2;\ 1)$; г) $\vec{a}=(2;\ 4;\ 7)$, $\vec{b}=(1;\ 2;\ 3,5)$?

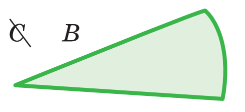
1311. Знайдіть суму векторів:

а) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PK}$.

1312. Знайдіть різницю векторів:

а) $\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PT}$; б) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$.

1313. Відгадайте ребус (мал. 358).



Мал. 358

А

1314. Точка B — середина відрізка AC, а C — середина відрізка BD. Зобразіть відрізки AC і BD. Чи рівні вектори:

а) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

1315. За якого значення n вектори $\vec{a}(4;\ 2n-1;\ -1)$ і $\vec{b}(4;\ 9-3n;\ -1)$ рівні?

1316. Дано точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(3;\ 7;\ 6)$. Знайдіть координати векторів:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{BO}$, де O — початок координат.

1317. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(1;\ 2;\ 5)$ і $B(-3;\ 2;\ 4)$; б) $A(-3;\ 2;\ 0)$ і $B(-1;\ 5;\ 2)$.

1318. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо $M(3;\ 2;\ -1)$, $N(1;\ -2;\ -1)$.

1319. Знайдіть координати і довжину вектора MN, якщо:

а) $M(4;\ -1;\ 3)$, $N(1;\ -1;\ -1)$; б) $M(19;\ 4;\ 35)$, $N(20;\ 3;\ 40)$.

1320. Знайдіть модуль вектора:

а) $\vec{a}=(2;\ 3;\ -1)$; б) $\vec{c}=(1;\ 2;\ 6)$.

1321. Модулі векторів $\vec{a}=(2;\ 1;\ 3)$ і $\vec{b}=(-1;\ x;\ 2)$ рівні. Знайдіть x.

1322. Знайдіть координати вектора $\vec{a}=(a;\ 2a;\ -a)$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{54}$.

1323. Знайдіть суму і різницю векторів:

а) $\vec{a}=(3;\ 1;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ -2;\ 5)$;

б) $\vec{a}=(-2;\ 4;\ 11)$, $\vec{b}=(2;\ 6;\ 21)$;

в) $\vec{a}=(-3,2;\ 4,6;\ 3)$, $\vec{b}=(-0,2;\ 2;\ 3,5)$;

г) $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{3};\ 0,3;\ \dfrac{2}{5}\right)$, $\vec{b}=\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3};\ -\dfrac{3}{4}\right)$.

1324. Знайдіть суму векторів $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ та її модуль, якщо:
$\vec{x}=\left(0;\ 3;\ \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y}=\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$; $\vec{z}=\left(-1;\ \frac{1}{2};\ 2\right)$.

1325. Знайдіть суму векторів:
а) $\overrightarrow{CX}$ і $\overrightarrow{XP}$;
б) $\overrightarrow{BT}$ і $\overrightarrow{AB}$;
в) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DE}$;
г) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CK}$.

1326. Дано вектор $\vec{a}=(3;\ -4;\ 2)$. Знайдіть координати вектора:
а) $3\vec{a}$; б) $\frac{3}{4}\vec{a}$; в) $-0,5\vec{a}$.

1327. Помножте вектор $\vec{a}=(3;\ -4;\ 2)$ на: 3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 0.

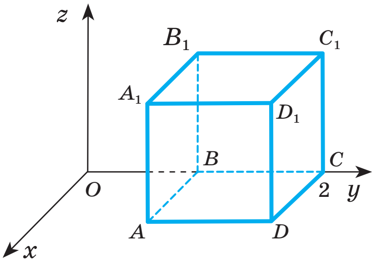
1328. Дано вектор $\vec{p}=(6;\ -8;\ 0)$. Знайдіть координати вектора:
а) $2\vec{p}$; б) $-\vec{p}$; в) $-1,5\vec{p}$; г) $\frac{1}{2}\vec{p}$; ґ) $0\cdot\vec{p}$.

1329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чи колінеарні вектори:
а) $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{AB}$;
б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{C_1D_1}$;
в) $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$;
г) $\overrightarrow{AD_1}$ і $\overrightarrow{BA_1}$?

1330. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Напишіть:
а) пару колінеарних векторів; б) трійку компланарних векторів.

Б

1331. У прямокутній системі координат розмістіть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1, як на малюнку 359. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$.



Мал. 359

1332. Дано вектори $\vec{a}=(-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{b}=(6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати вектора:
а) $2\vec{a}+3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; в) $0,5\vec{a}-1,5\vec{b}$.

1333. Дано вектори $\vec{p}=(-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{q}=(6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати вектора:
а) $2\vec{p}+3\vec{q}$; б) $\vec{p}+\frac{3}{2}\vec{q}$; в) $2\vec{q}-3\vec{p}$.

1334. Знайдіть модулі векторів $3\vec{a}-\vec{b}$ і $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;\ 0;\ -3)$ і $\vec{b}=(5;\ -1;\ 2)$.

1335. Чи колінеарні вектори $\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(2;\ -2;\ 4)$, $\vec{b}=(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{c}=(-8;\ 16;\ 0)$?

1336. Задано вектори $\vec{a}=(1;\ 3;\ 2)$ і $\vec{m}=(1;\ 0;\ -4)$. Установіть відповідність між векторами (1–4) та квадратами їх довжин (А–Д).

1	$\vec{m}+\vec{a}$	**А**	17
2	$\vec{a}-\vec{m}$	**Б**	56
3	$2\vec{a}$	**В**	45
4	$-2\vec{m}$	**Г**	37
		Д	68

1337. При яких значеннях k вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

а) $\vec{a}=(2;\ k;\ -3)$, $\vec{b}=(-4;\ 10;\ 6)$; б) $\vec{a}=(k;\ -2;\ -1)$, $\vec{b}=(-3;\ 6;\ 3k)$?

1338. При яких значеннях m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

а) $\vec{a}=(1;\ m;\ -3)$, $\vec{b}=(-2;\ 10;\ 6)$; б) $\vec{a}=(m;\ -2;\ 4)$, $\vec{b}=(-3;\ 6;\ m)$?

1339. Дано точки: $A(-1;\ 4;\ 6)$, $B(2;\ -3;\ 1)$, $C(-1;\ 0;\ 2)$, $D(-2;\ 6;\ 1)$. Знайдіть координати векторів: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

1340. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо

$\overrightarrow{OA}=(-1;\ 2;\ -6)$, $\overrightarrow{OB}=(2;\ -4;\ 3)$, $\overrightarrow{OC}=(2;\ -4;\ 6)$?

1341. Знайдіть координати вектора, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{2}$, а всі координати рівні.

1342. При якому значенні a довжина вектора $\vec{m}$ дорівнює $\sqrt{21}$, якщо:

а) $\vec{m}=(4;\ a;\ 2)$; в) $\vec{m}=(a;\ 1;\ a+2)$;

б) $\vec{m}=(a-1;\ 1;\ 4)$; г) $\vec{m}=(a-1;\ a-2;\ a+1)$?

1343. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(1;\ -3;\ 1)$, $B(2;\ 4;\ -6)$, $C(3;\ -1;\ 1)$;
б) $A(2;\ -2;\ 1)$, $B(4;\ 0;\ -1)$, $C(1;\ 2;\ -3)$.

1344. Дано чотирикутники $ABCD$ і $MNPK$. Який із чотирикутників є ромбом, а який — квадратом, якщо: $A(6;\ 7;\ 8)$, $B(8;\ 2;\ 6)$, $C(4;\ 3;\ 2)$, $D(2;\ 8;\ 4)$ і $M(3;\ 5;\ 2)$, $N(7;\ 1;\ 2)$, $P(3;\ -3;\ 2)$, $K(-1;\ 1;\ 2)$?

1345. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

Вправи для повторення

1346. Намалюйте прямокутну систему координат у просторі та позначте точки: $A(0;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(3;\ 0;\ 0)$, $D(3;\ 4;\ 0)$, $E(3;\ 4;\ 2)$. Знайдіть: а) довжину відрізка AB; б) координати середини відрізка CD; в) координати вектора $\overrightarrow{DE}$.

1347. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}=(1;\ -3)$ і $\vec{b}=(2;\ 5)$.

1348. Юрій Логвин — український художник-графік і письменник, один з перших, хто розробив поштові марки незалежної України. У 2007 р. було випущено два блоки марок «Хати України». Кожен блок містить 6 марок і 6 відповідних купонів. На малюнку 360 зображено марку і купон «Слобожанщина», що входять до одного з цих блоків. Відомо, що довжина марки в 1,4 раза більша за ширину, а площа марки і купона разом дорівнюють 25,35 см². Знайдіть площу марки і купона окремо. Дізнайтеся, які ще серії марок розробив Юрій Логвин. Складіть свою задачу про марки цього автора.

Мал. 360

§ 37. Застосування векторів

За допомогою координат і векторів можна розв'язувати багато цікавих і важливих задач з фізики, астрономії, геодезії та інших прикладних наук. Частина математики, у якій розглядають методи розв'язування геометричних задач алгебраїчними методами за допомогою координат і векторів, називають *аналітичною геометрією*. Її вивчають на математичних факультетах і в технічних навчальних закладах.

Коли геометричну задачу розв'язують векторним методом, її спочатку немовби перекладають «мовою векторів», враховуючи такі особливості:

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ означає, що точки A і B збігаються;

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні або збігаються;

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}$ — точки O, A, B, C розміщені в одній площині;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ — прямі AB і CD перпендикулярні;

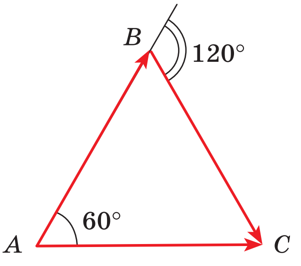
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Одержані векторні рівності перетворюють за відомими правилами дій над векторами, після чого їх знову перекладають звичайною мовою геометрії.

Останні дві рівності ви вивчали в курсі планіметрії, коли розглядали вектори на площині. Введемо поняття скалярного добутку для простору. Щоб увести це поняття, пояснимо, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими — 0°. Наприклад, якщо ABC — рівносторонній трикутник, то кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 60°, а між $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ — 120° (мал. 361).

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.



Мал. 361

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

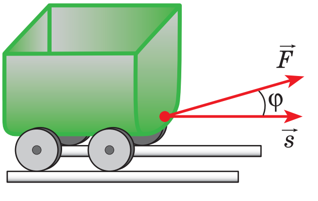
Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Якщо хоч один з двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

Приклад застосування скалярного добутку векторів відомий з фізики. Механічна робота A, яку виконує стала сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{s}$ (мал. 362), дорівнює скалярному добутку даних векторів:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\varphi.$$



Мал. 362

Для розв'язування геометричних задач використовують скалярний добуток векторів, заданих координатами. Можна довести таку властивість.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ **і** $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ **дорівнює**

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Із цієї властивості випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ завжди

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \text{ і } (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Враховуючи ці векторні рівності, а також властивості додавання векторів і множення вектора на число, можна зробити висновок, що векторні вирази перетворюють майже так само, як і многочлени. Обчислювати скалярні добутки неважко. А знаючи скалярний добуток векторів та їх модулі, можна обчислити косинус кута між даними векторами.

Задача. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(1;\,2;\,2)$ і $\vec{c}=(2;\,3;\,6)$.

Розв'язання. За означенням $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi$. Тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{1\cdot2+2\cdot3+2\cdot6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{20}{21}.$$

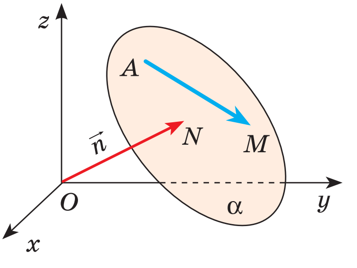
Відповідь. $\cos\varphi=\dfrac{20}{21}$.

Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90°, то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо cos 90° = 0. І навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює 0, то косинус кута між ними дорівнює 0. А це означає, що кут між ними дорівнює 90°, тобто вектори перпендикулярні. Тому маємо *умову перпендикулярності двох векторів*: **два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.**

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=\vec{a}^2$, звідки випливає, що $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Отже, векторним методом можна розв'язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, а й набагато ширший клас задач. Тут потрібно пам'ятати, що, розв'язуючи такі задачі, треба спочатку ввести вектори та сформулювати умову задачі мовою векторів.

Задача. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}=(a;\,b;\,c)$, має вигляд $ax+by+cz+d=0$.



Мал. 363

Розв'язання. Нехай площина α проходить через точку $A(x_0;\,y_0;\,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(a;\,b;\,c)$, а $M(x;\,y;\,z)$ — довільна точка площини α (мал. 363). Вектори $\vec{n}=(a;\,b;\,c)$ і $\overrightarrow{AM}=(x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

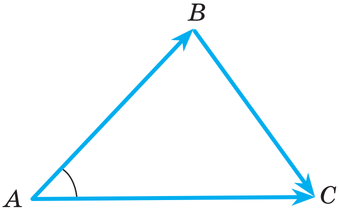
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Це й буде шуканим рівнянням площини α. Якщо розкриємо дужки та позначимо значення виразу $ax_0+by_0+cz_0=-d$, то дістанемо рівняння $ax+by+cz+d=0$.

Перевірте себе

1. Що називають векторним методом розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?
3. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$?
5. Назвіть умову перпендикулярності двох векторів.

Виконаємо разом



Мал. 364

1) Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(3;\ -1;\ 5)$, $B(-1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 3)$.

Розв'язання. Введемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (мал. 364) і знайдемо їх координати:

$\overrightarrow{AB}=(-4;\ 0;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;\ 2;\ -2)$.

За означенням скалярного добутку,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A$.

Тому $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+0+6=6$,

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+0+9}=5$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$, то $\cos A=\dfrac{6}{5\cdot2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

Отже, $\cos A=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

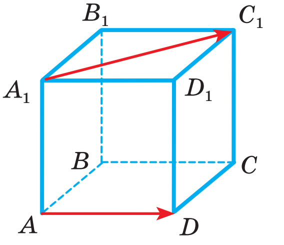
2) При якому значенні m вектори $\vec{a}=(4;\ 2m;\ 5)$ і $\vec{b}=(m;\ 3;\ 4)$ перпендикулярні?

Розв'язання. Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=4m+6m+20=10m+20$, то, розв'язавши рівняння $10m+20=0$, знайдемо, що $m=-2$.

3) Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;\ -3;\ 5)$ і паралельна площині, рівняння якої $2x-3y+2+10=0$.

Розв'язання. Дана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(2;\ -3;\ 1)$. Тому паралельна їй площина, рівняння якої треба скласти, перпендикулярна до цього вектора, тобто її рівняння має вигляд $2x-3y+z+d=0$. Залишається знайти d. Оскільки точка $A(1;\ -3;\ 5)$ належить цій площині, то $2\cdot1-3\cdot(-3)+5+d=0$, звідки $d=-16$. Отже, $2x-3y+z-16=0$.

Виконайте усно



Мал. 365

1349. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 365).

а) Знайдіть кут між векторами:

$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$.

б) Знайдіть скалярний добуток векторів:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DD_1}$; $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{D_1D}$.

1350. Які з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ перпендикулярні, якщо $\vec{a}=(0;\ 1;\ 2)$, $\vec{b}=(-3;\ 0;\ 0)$, $\vec{c}=(0;\ -2;\ 1)$.

1351. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(0;\ -5;\ 6)$ і $\vec{b}=(3;\ 0;\ -1)$; б) $\vec{a}=(1;\ 1;\ 1)$ і $\vec{b}=(-2;\ 3;\ 2)$.

А

1352. У $\triangle ABC$ $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайдіть кут між векторами:
а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

1353. Накресліть тетраедр $ABCP$, у якого кожне ребро дорівнює a. Обчисліть скалярний добуток: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$.

1354. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини та кут між ними дорівнюють:
а) 5; 12; 60°; б) 3; $\sqrt{2}$; 45°; в) 5; 6; 120°; г) 4; 7; 180°.

1355. Трикутник ABC — рівносторонній, $AB = 6$. Знайдіть скалярні добутки: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

1356. Зайдіть скалярний добуток векторів:
а) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-8; 2; 4)$; в) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ і $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;
б) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ і $\vec{n} = (2; 3; 0,5)$; г) $\vec{c} = (4; -2; 3)$ і $\vec{d} = (2; 3; -10)$.

1357. Дано вектори $\vec{p} = (-1; 3; 2)$ і $\vec{q} = (-3; -1; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів:
а) $\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{p} - \vec{q}$; б) $\vec{p} + 2\vec{q}$ і $3\vec{p} - \vec{q}$; в) $2\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

1358. Знайдіть косинус кута між векторами, якщо:
а) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$; в) $\vec{a} = (-4 : -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;
б) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$; г) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$.

1359. Знайдіть кут між векторами:
а) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$ і $\vec{b} = (0; 0; 4)$; в) $\vec{c} = (0; 0; 2)$ і $\vec{d} = (1; 0; -1)$;
б) $\vec{x} = (1; 1; 0)$ і $\vec{y} = (0; -1; 1)$; г) $\vec{p} = (0; 2; 2)$ і $\vec{k} = (3; 0; 3)$.

1360. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ — прямокутний.

1361. При яких значеннях x вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні:
а) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$; в) $\vec{m} = (x+2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;
б) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$; г) $\vec{m} = (x-3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

Б

1362. Дано три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ і $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати такої точки D осі z, щоб виконувалась умова $AD \perp BC$.

1363. Дано три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, якщо точка D лежить: а) на осі Ox; б) на осі Oy; в) на осі Oz.

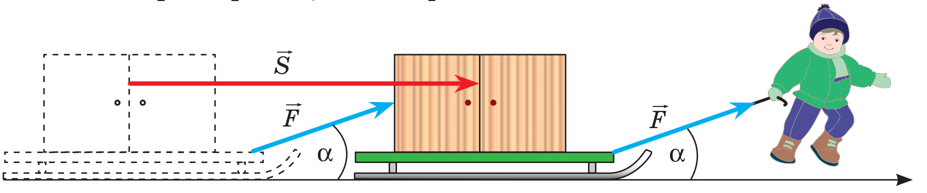
1364. Дано точки $A(1; 4; 8)$ і $B(-4; 0; 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

1365. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; б) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

1366. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо: а) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC} = 0,5\overrightarrow{AD}$.

1367. Визначте вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CA}=(1;\ 4;\ 2)$, $\overrightarrow{CB}=(-4;\ 1;\ 0)$.

1368. Навісну шафу тягнуть рівномірно на санчатах по горизонтальній поверхні (мал. 366). Мотузка, за допомогою якої тягнуть санчата, утворює з горизонтом кут 30°. Сила натягу мотузки 25 Н. Яка робота виконана при переміщенні шафи на 50 м?



Мал. 366

1369. Під дією сили 20 Н, прикладеної під кутом 30° до напряму переміщення, фізичне тіло перемістилося на 3 м. Знайдіть виконану цією силою роботу.

1370. Які точки належать площині $x + y + z + 3 = 0$: $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ -3)$, $C(2;\ 0;\ -5)$, $D(0;\ -3;\ 3)$?

1371. Яка з площин $2x - 4y + 6z - 2 = 0$, $2x + 4y + 6z + 3 = 0$, $-4x + 8y - 12z = 0$ паралельна площині $x - 2y + 3z - 5 = 0$?

1372. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(5;\ 0;\ -3)$ і проходить через точку $A(2;\ -1;\ 4)$.

1373. Дано точку $A(a;\ b;\ c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

1374. Дано точки $A(1;\ 2;\ -3)$ і $B(4;\ -2;\ 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить:
а) через точку A; б) через точку B; в) через середину відрізка AB.

1375. Згадайте байку Л. Глібова «Лебідь, щука і рак» (мал. 367). Змоделюйте ситуацію, що розглядається в ній, за допомогою векторів. Які можливі варіанти розташування цих векторів і співвідношень між ними. Зробіть висновки.

Мал. 367

Вправи для повторення

1376. Вектор, довжина якого дорівнює 10, має три однакові координати. Знайдіть їх.

1377. Від точки $A(2;\ -5;\ 4)$ відкладено вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Знайдіть координати точки B, якщо $\vec{a}=(1;\ 3;\ -2)$.

1378. Запишіть рівняння кола радіуса 5 із центром:
а) у початку координат; б) у точці $O(1;\ -2;\ 3)$.

Самостійна робота 9

Варіант 1

1 Дано точки $M(2; -1; 3)$ і $N(2; 5; 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overrightarrow{MN}$.

2 Дано вектори $\vec{a} = (3; 0; 7)$ і $\vec{b} = (1; 2; 0)$. Знайдіть:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $2\vec{a}$; в) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3 Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2; 0; -1)$, $B(1; 3; 0)$ і $C(0; -1; 2)$.

Варіант 2

1 Дано точки $M(3; -5; 3)$ і $N(3; 1; 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overrightarrow{MN}$.

2 Дано вектори $\vec{a} = (0; 4; 5)$ і $\vec{b} = (3; 2; 0)$. Знайдіть:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $3\vec{a}$; в) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3 Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1; 0; 3)$, $B(0; -1; 2)$ і $C(3; 4; 0)$.

ТВОРЧІ ЗАВДАННЯ

1. Які геометричні проблеми досліджував відомий поет і філософ Омар Хайям?
2. Хто з математиків був одним із засновників Кири́ло-Мефо́діївського товариства? Який внесок він зробив у розвиток математики?
3. Прочитайте роман Р. Іваничука «Четвертий вимір». Кому з українських математиків присвячено цей твір?
4. Дізнайтеся про інші художні твори, присвячені відомим математикам.
5. Дізнайтеся більше про ортогональне проектування і метод Монжа. Чому цей метод довгі роки був засекречений?
6. Доберіть кілька цікавих висловлювань про геометрію. Дізнайтеся більше про їх авторів.
7. Дізнайтеся, як створити своїми руками вироби з сірників. Встановіть взаємне розташування сірників у кількох виробах. Спробуйте створити власну модель із сірників.
8. Напишіть есе на тему «Краса тісно пов'язана з симетрією».
9. Підготуйте презентацію про використання симетрії в мистецтві (архітектурі, легкій і харчовій промисловості, сільському господарстві тощо).

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

✓ Знаю, що таке прямокутна система координат і вмію встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору та трійками дійсних чисел: $A(x;\ y;\ z)$ — точка з абсцисою x, ординатою y і аплікатою z.

✓ Умію знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка.

- Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат:
$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$
- Якщо точка $C(x;\ y;\ z)$ — середина відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

✓ Розумію, що таке вектори і як їх задають у просторі.

- Зображати ненульові вектори можна напрямленими відрізками. Будь-які вектори зручно задавати в координатній формі.
- Координатами вектора з початком у точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$; $z = z_2 - z_1$. Записують так: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$.
- Модулем вектора називають довжину напрямленого відрізка, що його зображає. Позначають його символом $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.
Якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Як би не розміщувалися в просторі точки A, B, C, D, завжди
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

✓ Знаю, як виконувати дії над векторами $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2),$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2),$$
$$k\vec{a} = (kx;\ ky;\ kz).$$

- Скалярним добутком двох векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.
- Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

✓ Знаю умови паралельності та перпендикулярності векторів і вмію їх використовувати до розв'язування задач.

- Вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$, або $\vec{b} = k\vec{a}$.

Відповіді

Розділ 1

7. $S=\frac{1}{16}P^2$. **9.** Обидва говорять правильно. **10.** $L=\frac{3937}{3600}l$. **13.** в) 1; 0; 1; 2; 3. **15.** б) 5; 1,5; 1; 0,5; –9. **19.** а) (0; 0). **20.** б) $[-1;+\infty)$; г) $x\neq 1$. **21.** [0; 25]. **25.** $m = 0{,}8V + 40$. **30.** в) $y = 3x$. **33.** $y = x + 3$. **35.** Через точку (0; 5) графік не проходить. **43.** $t=\frac{2}{61}h+14\frac{51}{61}$. **47.** а) $3a^2bc^3$. **56.** а) [0; 6]. **61.** а) Один; в) два. **62.** в) 25. **63.** а) $y > 0$, якщо $x > -3$; $y < 0$, якщо $x < -3$. **64.** б) Спадна. **71.** а) $y = 0$, якщо $x = -11$ і $x = 1$; $y < 0$, якщо $x\in(-11;1)$. **72.** б) –2. **73.** в) –1. **76.** а) $x > -2{,}5$. **80.** а) (3; 2). **81.** а) 3 і –3. **83.** а) 3; д) –0,2. **89.** в) 1,5. **92.** б) 0,8. **93.** в) 7. **97.** б) –5. **98.** в) $5+2\sqrt{6}$. **100.** в) $\sqrt[6]{40}$. **101.** а) 4. **103.** а) $10\sqrt[3]{3}$. **104.** б) $2ab\sqrt[3]{4a^2}$. **105.** б) $\sqrt[4]{48}$. **106.** а) $\sqrt[4]{5a^4b^4}$. **107.** в) $5\sqrt[5]{16a^3}$. **108.** г) $\sqrt[3]{3}$. **109.** а) 8 і –8. **110.** в) 4 і –4. **111.** в) 5. **112.** в) 9. **113.** в) 0. **114.** в) 1. **115.** в) 0. **117.** б) 6. **118.** а) $a\sqrt[4]{b}+b\sqrt[4]{a}$. **119.** а) $\sqrt{5}$. **120.** а) $3\sqrt[4]{8}$. **121.** б) $-3\left(1+\sqrt{6}\right)$. **123.** а) $\sqrt{11}$ і $-\sqrt{11}$. **124.** в) 8. **127.** в) $7{,}5\cdot 10^5$. **129.** а) $(-\infty;3)$. **135.** а) 8. **136.** в) 6. **137.** в) 343. **139.** в) 8. **140.** в) 5. **142.** б) 0,5. **143.** а) 3. **144.** а) 4. **146.** б) x^2. **147.** б) $c + 1$. **150.** б) $\sqrt[3]{x-3}$. **151.** в) $a^2(x-a)^{0,5}$. **152.** а) $\sqrt[3]{c}+\sqrt[5]{c}$. **154.** б) a^1. **155.** б) 4. **156.** в) 2. **157.** а) 1000. **158.** б) 0,8. **159.** а) $a^2 - x$. **160.** б) $n + 8$. **161.** б) $x^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$. **162.** в) $c + 1$; г) $-\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$. **163.** в) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$. **166.** б) 5 і –4. **177.** Ні. **179.** $-m$. **189.** а) 2; г) 0,5. **191.** б) 8. **194.** б) 1. **196.** ґ) –0,25. **203.** а) 5; в) 6. **204.** а) 2. **205.** а) 0,75 і –2; б) 7 і –11; в) 2 і –1,4. **206.** а) 0,25. **208.** б) 5; в) 0, 3 і 4. **209.** а) 2. **211.** 60 кг.

Розділ 2

224. $\sin\alpha=0{,}8,\ \mathrm{tg}\,\alpha=1\frac{1}{3},\ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{3}{4}$ або $\sin\alpha=-0{,}8,\ \mathrm{tg}\,\alpha=-1\frac{1}{3},\ \mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$. **226.** б) $\cos 10° > \cos 40°$; в) $\sin 20° = \sin 160°$. **227.** а) $0{,}5\left(1+\sqrt{3}\right)$; в) 0,5. **228.** б) $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\mathrm{ctg}\,90°=0$. **229.** а) $\cos 5° > \cos 7°$. **230.** б) $0{,}25\sqrt{3}$. **231.** а) Мінус; г) плюс. **235.** а) Плюс. **237.** а) 0. **238.** а) $2\sqrt{2}$. **240.** в) 2 і 0. **241.** в) Ні. **245.** а) 30°. **246.** а) $0{,}5\sqrt{2}$ або $-0{,}5\sqrt{2}$. **247.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$. **250.** а) $\beta > \alpha$. **262.** д) $\frac{3\pi}{4}$. **263.** в) $\frac{7\pi}{12}$. **264.** а) 120°. **265.** а) ≈ 115°. **271.** а) Мінус. **276.** а) 0. **277.** в) 0,5. **278.** б) 1,25. **279.** б) $\sqrt{2}$. **280.** б) $\sin 1 > \sin 3$. **287.** а) 2; в) 1,5. **288.** а) $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$; б) –4. **289.** а) $\frac{3}{4}$; в) 1. **298.** а) $\sin^2\alpha$; в) 1.

299. а) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha$; в) $\mathrm{tg}\,x$. **300.** б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **301.** б) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{3}{4}$. **302.** б) $\sin\alpha=-0{,}6$. **303.** а) 0. **309.** а) $2\sin^2\alpha$. **310.** а) $\mathrm{ctg}\,\alpha$. **311.** б) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **322.** г) $-\sin\alpha$. **323.** а) $\cos 2\alpha$. **326.** а) $-\mathrm{ctg}\,\alpha$. **327.** б) $\sin^2\alpha$. **329.** а) $\sin x+\cos x$. **330.** а) 0. **331.** а) -1. **332.** в) 1. **333.** а) 0,5. **334.** б) 1. **335.** а) $-\cos\alpha$. **336.** б) $-\cos 3\alpha$. **337.** а) 0. **338.** в) 0,5. **340.** а) -1. **343.** а) $\cos^2\alpha$. **344.** а) 1. **345.** а) $\mathrm{tg}^2\,\alpha$. **364.** а) R. **365.** а) $x\neq\pi$, $n\in Z$. **367.** а) $[-2;\,2]$; б) $[0{,}5;\,1{,}5]$. **372.** а) Непарна; б) парна. **384.** На 32 %. **393.** б) π. **394.** в) $0{,}5\,\pi$. **399.** а) π. **400.** а) 20π. **401.** б) 4π. **415.** а) $\sin(\alpha+\beta)$. **420.** а) $\cos\alpha\sin\beta$. **421.** в) $-0{,}5$. **422.** а) 0. **436.** г) $2+\sqrt{3}$. **437.** б) $0{,}25\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **438.** а) 0. **439.** а) $\sin\alpha$. **440.** а) $-0{,}5\sqrt{3}\cos x$; в) $-\mathrm{ctg}\,\beta$. **441.** а) 1. **442.** а) $0{,}5\sqrt{3}$. **443.** а) $\cos\alpha$. **444.** а) $\sqrt{2}\sin x$. **445.** а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **462.** 75 км/год і 25 км/год. **463.** б) $[0{,}5;\,5]$. **453.** $\sin 2\alpha=-0{,}96$; $\cos 2\alpha=-0{,}28$. **476.** в) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **477.** а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **478.** а) Розв'язків немає. **479.** а) $\pi n,\ n\in Z$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **480.** а) $\pi k,\ k\in Z$. **481.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. **482.** а) $2\pi n,\ n\in Z$. **483.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. **484.** а) $\frac{\pi}{2}-2\pi n,\ n\in Z$. **485.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **486.** 45° і 135°. **487.** а) 30° і 150°. **489.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$. **494.** а) $\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **495.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **497.** а) $\pi k,\ k\in Z$. **499.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **500.** а) $\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. **501.** а) $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$. **502.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **504.** а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right],\ k\in Z$; б) $\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$. **507.** в) Розв'язків немає.

Розділ 3

518. а) -3; б) 3. **519.** а) 22; в) -7. **520.** а) 0,3. **521.** а) 0,9. **522.** а) 1,2; 0,1. **523.** а) 0,2; 2. **524.** а) 150 мишей. **526.** а) ≈ 50 мишей за тиждень; б) ≈ 30 мишей за тиждень. **527.** а) ≈ 11 км/год. **531.** а) $\Delta K(x)=600$ грн; б) $\Delta R(x)=1552$ грн. **533.** а) 45; в) 0. **534.** а) $-0{,}2$. **535.** а) 1. **536.** а) -8. **537.** а) $2x$. **557.** а) -4. **559.** а) 0; 8; -12. **560.** а) 3. **561.** а) 5. **562.** а) $y=3x-2$. **565.** а) 0,5. **566.** а) -1. **569.** а) $y=-6x-12$. **577.** в) $3x^5$; г) -1. **578.** а) $2x$; в) $4x^3+18x$. **579.** а) $6x^2$. **581.** -3; -5; -9. **582.** -94; 2; $24\sqrt{2}+2$. **584.** а) $2\cos x$. **585.** а) $2x-\sin x$. **586.** а) $2{,}5x^{1{,}5}$. **587.** б) 8. **588.** а) -1. **589.** а) $5x^4-10x$; в) $2x+1$. **591.** а) $7x^6-6x^2$; б) $3x^2$. **594.** $y=4x-9$. **595.** $y=1$. **596.** $y=-94x-144$. **598.** а) $3x^2\cos x-x^3\sin x$. **600.** а) $\cos x-\sin x-x\cos x$. **603.** а) 1.

605. а) $-\frac{2}{(x+1)^2}$. **608.** в) 0. **610.** а) $y=-x+\pi-1$. **612.** а) (−1; 2). **615.** а) $4\cos 4x$. **616.** а) $3\cos 3x$. **617.** а) $4\sin^3 x \cos x$. **618.** б) 40. **628.** а) 0 і 1. **629.** б) 0,5. **635.** а) Зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$. **636.** а) Зростає на [−1; 0] і $[1; +\infty)$. **637.** а) Спадає на [−1; 3]. **639.** а) $x = -0{,}5$ — точка мінімуму. **640.** а) $x = 0$ — точка максимуму. **641.** а) $x = 0$ — точка мінімуму, $x = -1$ — точка максимуму. **642.** а) $x=\frac{1}{7}$ — точка мінімуму. **643.** а) $x = 1$ — точка мінімуму, $x = -1$ — точка максимуму. **644.** а) Точок екстремуму немає. **649.** а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$ — точки мінімуму, $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ — точки максимуму (при кожному $n\in Z$). **651.** а) $y_{\max} = y(0) = 2$. **668.** 21; −4. **669.** 56; −56. **670.** а) 6; −19. **671.** −0,5. **672.** 1024. **676.** 200 × 200 (м). **677.** 1200 м. **679.** а) 1) $\sqrt{20}$, 0; б) 1) 5; 4. **680.** а) Ні; б) ні. **681.** а) $[-2; +\infty)$. **682.** б) $(-\infty; -2]\cup[2; +\infty)$. **683.** $XM=\sqrt{3}$. **684.** Квадрат. Другий спосіб геометричний. Доведіть, що площа прямокутного трикутника, вписаного в коло, найбільша тоді, коли він рівнобедрений. **685.** Квадрат. **686.** 4 м, 4 м і 2 м. **695.** а) 10 м/с. **696.** а) $v(t) = 8t + 3$; б) $a(t) = 8$; в) $v(5) = 43$ м/с; $a(5) = 8$ м/с². **697.** а) $v(t) = (6t + 4)$ рад/с. **698.** а) 16 м/с; 42 м/с². **699.** Через $6\frac{2}{3}$ с. **700.** 4 град/с. **701.** $\frac{13}{12}$ г/год. **703.** $t = 1$ с. **707.** 1 А. **709.** а) 4 м/с і 2 м/с. **710.** а) 36 м/с². **712.** а) 20 м/с; б) 4 с; в) 80 м.

Розділ 4

716. Так. **729.** а) Безліч, одну або жодної. **740.** На три або чотири частини. **761.** Ні. **764.** а) 1) AD; в) 1) ні. **765.** а) $(ABC)\cap(ABF)=AB$. **779.** Ні. **784.** 6 см. **786.** 32 см. **793.** а) Безліч. **794.** а) Одну. **795.** Ні. **797.** Ні. **798.** Ні. **799.** Відрізок BC не перетинає a, а пряма BC може перетинати. **806.** Чотири. **816.** Так. **817.** Шестикутник. **832.** а) $a\cap AB=A$. **833.** б) $MN \parallel BC$. **835.** Ні. **836.** Ні. **839.** 7,6 см. **842.** 22 м. **850.** 15 см. **851.** У 2 рази. **852.** 36 см; $5\frac{1}{7}$ см. **853.** 1 м; 7,5 м. **854.** 5 : 2. **873.** Променем, прямою або довільним кутом, який менший від розгорнутого. **876.** Ні. **879.** $A_1B_1 = 5$ см; $A_1C_1 = 3$ см. **880.** 15 см і 10 см, або 3 см і 2 см. **890.** 410м. **944.** 4 : 1. **952.** 6 см. **953.** 5 см. **954.** б) 12 см. **955.** $(2\sqrt{2}-1):1$. **956.** 10 см. **957.** а) 4 см; в) 7 см. **958.** а) 11 см; б) 9 см. **963.** $2{,}25\sqrt{3}$ см². **964.** $\frac{a}{16}\sqrt{16b^2-5a^2}$. **965.** $(2+\sqrt{2})l$; $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$. **967.** 40 см і 96 см². **979.** Ні. **988.** Ні. **991.** Ні. **992.** 10 дм. **993.** 10,5 дм і 1,6 дм. **994.** в) 4 см; г) 4 м. **995.** $2a+1{,}2\sqrt{2}a$. **997.** $16\sqrt{3}$ см².

Розділ 5

1008. 60°. **1009.** а) 80°. **1010.** а) 45°. **1013.** Можуть. **1014.** Ні. **1016.** По 60°. **1017.** а) $12\sqrt{2}$ см. **1018.** Так. **1024.** б) $\arccos\frac{3}{4}$. **1028.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **1029.** 60°. **1040.** 13 см. **1044.** a^2. **1045.** $m : n$. **1047.** 8 см. **1048.** $2a$. **1049.** 12 см. **1052.** $\frac{a\sqrt{33}}{3}$. **1053.** $\frac{3\sqrt{231}}{4}$ см. **1054.** 13 см. **1056.** б) 7 см. **1057.** а) 2 см. **1069.** 30 см. **1072.** 97 см. **1073.** $2a$ і $a\sqrt{2}$. **1080.** 35 см. **1085.** 13 см і 15 см. **1086.** 5 см. **1087.** $5\sqrt{6}$ см. **1088.** 2,8 см. **1108.** Безліч. **1115.** а) 1 см²; б) 3 дм². **1117.** а) $2\sqrt{11}$ см; б) 1 см. **1118.** $6\sqrt{2}$ см. **1119.** a. **1120.** m або $\sqrt{3}m$. **1121.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) 60°. **1122.** $\cos\varphi = 0{,}25$. **1124.** 44 см; 96 см². **1125.** 48 см. **1127.** $12\sqrt{14}$ см. **1139.** $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$. **1142.** 4 дм і 5 дм. **1146.** 12 см. **1150.** 24 см. **1153.** $\frac{d}{2}\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1160.** 8 м. **1161.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **1163.** 30 см. **1164.** 45 мм. **1166.** 28 м. **1169.** $\sqrt{6}$ см. **1171.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1173.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1198.** ≈ 2,38 м. **1200.** 70°, 110°, 70°, 110°. **1201.** $8\sqrt{3}$ см. **1202.** 5 см. **1204.** 3,7 дм. **1205.** а) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; б) 900 см². **1206.** 80°. **1207.** 30°. **1209.** $2a$. **1210.** 7 см. **1211.** а) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$; б) 4. **1217.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1218.** 9,6 см. **1221.** 26 см. **1224.** 45°. **1225.** 30°.

Розділ 6

1234. $M(2;\ -2;\ 5)$. **1242.** а) (0; 1; 8). **1243.** а) Так. **1246.** $B(-4;\ 7;\ 24)$. **1247.** $A(8; 18; -8)$. **1249.** $3\sqrt{6}$. **1250.** а) Так. **1251.** а) $D(-5; 9; 2)$. **1252.** $C(3; -8; 6)$. **1253.** б) $3\sqrt{6}$. **1255.** Ні. **1256.** а) $3\sqrt{38}$. **1257.** −4. **1258.** $M(0; -2; 0)$. **1259.** $3\sqrt{2}$. **1263.** а) $P=15\sqrt{2}$; $S=12{,}5\sqrt{3}$. **1264.** а) Квадрат. **1276.** $A_1(-1;\ 3;\ -2)$. **1285.** а) $A_1(1;\ -2)$. **1287.** (−1; 1; −1). **1297.** 1 або 4. **1316.** $\overrightarrow{AB}=(2; 5; 3)$, $\overrightarrow{BA}=(-2; -5; -3)$. **1320.** а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{41}$. **1321.** 3 або −3. **1322.** $\vec{a}=(3; 6; -3)$ або $\vec{a}=(-3; -6; 3)$. **1325.** а) $\overrightarrow{CP}$; б) $\overrightarrow{AT}$; в) $\overrightarrow{AE}$; **1326.** а) $3\vec{a}=(9; -12; 6)$. **1334.** $|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{123}$. **1338.** а) $m=-5$. **1339.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(2; -1; -6)$. **1351.** а) −6. **1352.** б) 130°. **1355.** б) −18. **1357.** а) 0. **1361.** а) $x = -9$. **1362.** $D(0;\ 0;\ 1)$. **1364.** $\cos x=\frac{4}{9}$. **1369.** $30\sqrt{3}$ Дж. **1372.** $5x - 3z + 2 = 0$. **1373.** $ax + by + cz = 0$. **1374.** а) $3x - 4y + 7z + 26 = 0$.

Покажчик

Зміст

Розділ 4. Паралельність прямих і площин у просторі

Розділ 5. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Розділ 6. Координати і вектори у просторі

Відомості про стан підручника

<table>
<tr><th rowspan="2">№</th><th rowspan="2">Прізвище та ім’я учня</th><th rowspan="2">Навчальний рік</th><th colspan="2">Стан підручника</th><th rowspan="2">Оцінка</th></tr>
<tr><th>на початку року</th><th>в кінці року</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА
Алгебра і початки аналізу та геометрія

Рівень стандарту

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп’ютерна верстка *П. В. Ширнін*
Коректор *Л. А. Еско*

Формат 70×100 1/16.
Ум. друк. арк. 23,328 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 22,63 + 0,55 форзац.
Наклад 59 230 пр. Зам. №

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, вул. Обсерваторна, 25
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано у ПРАТ «Харківська книжкова фабрика “Глобус”»
61052, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 3985 від 22.02.2011 р.
www.globus-book.com